Методы оптимальных решений

Шишкин Владимир Андреевич (http://www.vsh1791.ru)

Содержание

Список литературы

[1] Исследование операций в экономике: Учеб. пособие для вузов / Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко, И. М. Тришин, М. Н. Фридман; под ред. проф. Н. Ш Кремера. — М.: ЮНИТИ, 2003. — 407 с.

[2] *Х. А. Таха* Введение в исследование операций: Пер. с англ. — 7-е изд. — М.: Издательский дом «Вильямс», 2007. — 912 с.

[3] *Б. Лю* Теория и практика неопределённого программирования: Пер. с англ. — М.: БИНОМ, Лаборатория знаний, 2005. — 416 с.

1 Вопросы к экзамену

1. **Основные понятия**

   (a) Постановка задачи оптимизации в общем виде. Целевая функция. Ограничения. Допустимые и оптимальные решения. Экстремумы, минимумы и максимумы. Глобальный и локальный экстремумы.

   $$f(x) \to \mathsf{extr}, \quad x \in X \subseteq \mathbb{R}^n$$

   (b) Классификация оптимизационных задач. Линейные и нелинейные. Статические и динамические. Детерминированные и недетерминированные (оптимизация ожидаемого значения, задача с неопределёнными ограничениями, событийное программирование). Одно- и многокритериальные. Задачи многоуровневой оптимизации.

2. **Линейное программирование**

   (a) Постановка задачи линейного программирования. Целевая функция. Виды ограничений. Стандартная и каноническая формы ограничений, переход от стандартной формы к канонической. Простые примеры задач линейного программирования (задача о планировании производства, задача о диете, транспортная задача).

   $$cx \to \mathsf{extr}, \quad Ax \gtreqqless b$$

   (b) Графическое решение задачи линейного программирования с двумя неизвестными. Расположение решения. Единственное и неединственное решения. Отсутствие решения (неограниченная целевая функция, несовместная система ограничений).

   (c) Сипмлекс-метод. Базисные и свободные переменные. Идея симплекс-метода. Построение первого допустимого базисного решения (метод искусственного базиса, M-метод, двухшаговый симплекс-метод, двойственный симплекс-метод). Обобщённый симплекс-метод.

   $$x_b = A_b^{-1}(b - A_s x_s)$$

   (d) Двойственная задача линейного программирования. Построение двойственной задачи. Первая, вторая и третья теоремы двойственности. Экономический смысл двойственных переменных.

   (e) Задача линейного целочисленного программирования. Метод отсекающих плоскостей (метод Гомори). Метод ветвей и границ.

3. **Нелинейное программирование**

   (a) Гладкая скалярная задача без ограничений. Необходимые и достаточные условия существования экстремума.

   $$f(x) \to \mathsf{extr}, \quad x \in \mathbb{R}$$

   (b) Гладкая задача без ограничений. Необходимые условия существования решения. Достаточные условия существования решения второго порядка.

   $$f(x) \to \mathsf{extr}, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

(c) Гладкая задача с ограничениями-равенствами. Метод множителей Лагранжа.

$$L(x,\lambda) = \lambda_0 f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i h_i(x)$$

(d) Гладкая задача с ограничениями-неравенствами. Условия Куна-Таккера. Условия дополняющей нежёсткости. Экономический смысл множителей Лагранжа.

(e) Понятие о численных методах решения задач нелинейного программирования.

4. **Динамическое программирование**

(a) Постановка задачи динамического программирования. Состояние системы, управление, целевая функция. Принцип оптимальности. Уравнение Беллмана. Примеры задач динамического программирования.

$$S_0 \to S_1 \to \cdots \to S_N$$

2 Примеры задач

2.1 Линейное программирование

Постановка задачи

$$\begin{aligned}
10x_1 + 20x_2 + 7x_3 &\to \max \\
3x_1 + 4x_2 + x_3 &\leqslant 300 \\
2x_1 + 6x_2 + 3x_3 &\leqslant 400 \\
x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 &\geqslant 0
\end{aligned}$$

Решение задачи симплекс-методом

1. Приведение ограничений к каноническому виду:

$$\begin{aligned}
3x_1 + 4x_2 + x_3 + \tilde{x}_1 &= 300 \\
2x_1 + 6x_2 + 3x_3 + \tilde{x}_2 &= 400
\end{aligned}$$

2. Построение первого допустимого базисного решения:

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_1 &= 300 - 3x_1 - 4x_2 - x_3 \\
\tilde{x}_2 &= 400 - 2x_1 - 6x_2 - 3x_3
\end{aligned}$$

$$10x_1 + 20x_2 + 7x_3 \to \max$$

В качестве новой базисной переменной выбираем x_2. Из первого ограничения $x_{2,\max} = \frac{300}{4} = 75$; из второго — $x_{2,\max} = \frac{400}{6} = 66\frac{2}{3}$.

3. Второе допустимое базисное решение:

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_1 &= \frac{100}{3} - \frac{5}{3}x_1 + x_3 + \frac{2}{3}\tilde{x}_2 \\
x_2 &= \frac{200}{3} - \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{6}\tilde{x}_2
\end{aligned}$$

$$\frac{4000}{3} + \frac{10}{3}x_1 - 3x_3 - \frac{10}{3}\tilde{x}_2 \to \max$$

В качестве новой базисной переменной выбираем x_1. Из первого ограничения $x_{1,\max} = 20$; из второго — $x_{1,\max} = 200$.

4. Третье допустимое базисное решение:

$$x_1 = 20 + \frac{3}{5}x_3 - \frac{3}{5}\tilde{x}_1 + \frac{2}{5}\tilde{x}_2$$
$$x_2 = 60 - \frac{7}{10}x_3 + \frac{1}{5}\tilde{x}_1 - \frac{3}{10}\tilde{x}_2$$

$$1400 - x_3 - 2\tilde{x}_1 - 2\tilde{x}_2 \to \max$$

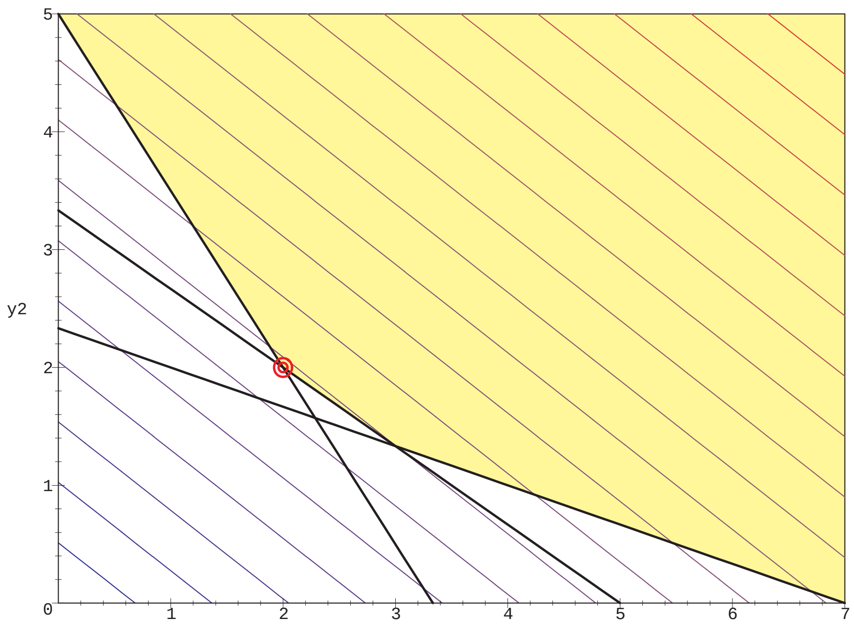
Значение целевой функции нельзя увеличить, следовательно найденное решение $(20, 60, 0)$ — оптимально.

2.2 Теория двойственности

Построение двойственной задачи

$$\begin{aligned} &300y_1 + 400y_2 \to \min \\ &3y_1 + 2y_2 \geqslant 10 \\ &4y_1 + 6y_2 \geqslant 20 \\ &y_1 + 3y_2 \geqslant 7 \\ &y_1 \geqslant 0, y_2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

Решение двойственной задачи графическим методом



Оптимальное решение — $(2, 2)$. Минимальное значение целевой функции — 1400.

Решение двойственной задачи двухшаговым симплекс-методом

1. Приведение ограничений к каноническому виду:

$$\begin{aligned}
&3y_1 + 2y_2 - \tilde{y}_1 = 10\\
&4y_1 + 6y_2 - \tilde{y}_2 = 20\\
&y_1 + 3y_2 - \tilde{y}_3 = 7
\end{aligned}$$

2. Введение искусственного базиса:

$$\begin{aligned}
&3y_1 + 2y_2 - \tilde{y}_1 + r_1 = 10\\
&4y_1 + 6y_2 - \tilde{y}_2 + r_2 = 20\\
&y_1 + 3y_2 - \tilde{y}_3 + r_3 = 7
\end{aligned}$$

$$r_1 + r_2 + r_3 \to \min$$

3. Первое допустимое базисное решение (с искусственными переменными):

$$\begin{aligned}
&r_1 = 10 - 3y_1 - 2y_2 + \tilde{y}_1\\
&r_2 = 20 - 4y_1 - 6y_2 + \tilde{y}_3\\
&r_3 = 7 - y_1 - 3y_2 + \tilde{y}_3
\end{aligned}$$

$$37 - 8y_1 - 11y_2 + \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 + \tilde{y}_3 \to \min$$

   В качестве новой базисной переменной выбираем y_2. Из первого ограничения $y_{2,\max} = 5$; из второго — $y_{2,\max} = 3\frac{1}{3}$; из третьего — $y_{2,\max} = 2\frac{1}{3}$.

4. Второе допустимое базисное решение (с искусственными переменными):

$$\begin{aligned}
&r_1 = \frac{16}{3} - \frac{7}{3}y_1 + \tilde{y}_1 - \frac{2}{3}\tilde{y}_3\\
&r_2 = 6 - 2y_1 + \tilde{y}_2 - 2\tilde{y}_3\\
&y_2 = \frac{7}{3} - \frac{1}{3}y_1 + \frac{1}{3}\tilde{y}_3
\end{aligned}$$

$$\frac{34}{3} - \frac{13}{3}y_1 + \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 - \frac{8}{3}\tilde{y}_3 \to \min$$

   В качестве новой базисной переменной выбираем y_1. Из первого ограничения $y_{1,\max} = 2\frac{2}{7}$; из второго — $y_{1,\max} = 3$; из третьего — $y_{1,\max} = 7$.

5. Третье допустимое базисное решение (с искусственными переменными):

$$\begin{aligned}
&y_1 = \frac{16}{7} + \frac{3}{7}\tilde{y}_1 - \frac{2}{7}\tilde{y}_3\\
&r_2 = \frac{10}{7} - \frac{6}{7}\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 - \frac{10}{7}\tilde{y}_3\\
&y_2 = \frac{11}{3} - \frac{1}{7}y_1 + \frac{3}{7}\tilde{y}_3
\end{aligned}$$

$$\frac{10}{7} - \frac{6}{7}\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 - \frac{10}{7}\tilde{y}_3 \to \min$$

   В качестве новой базисной переменной выбираем $\tilde{y}_3$. Из первого ограничения $\tilde{y}_{3,\max} = 8$; из второго — $\tilde{y}_{3,\max} = 1$; из третьего — $\tilde{y}_{3,\max} = \infty$.

6. Первое допустимое базисное решение без искусственных переменных:

$$y_1 = 2 + \frac{3}{5}\tilde{y}_1 - \frac{1}{5}\tilde{y}_2$$
$$\tilde{y}_3 = 1 - \frac{3}{5}\tilde{y}_1 + \frac{7}{10}\tilde{y}_2$$
$$y_2 = 2 - \frac{2}{5}\tilde{y}_1 + \frac{3}{10}\tilde{y}_2$$
$$1400 + 20\tilde{y}_1 + 60\tilde{y}_2 \to \min$$

Значение целевой функции нельзя уменьшить, следовательно найденное решение $(2, 2)$ — оптимально.

Анализ решения: $y_{\text{опт}} = (2, 2)$, следовательно в исходной задаче оба ограничения в оптимальной точке являются активными (ограничения-равенства), следовательно ресурсы, описываемые ограничениями, в дефиците.

$\tilde{y}_{\text{опт}} = (0, 0, 1)$, следовательно производство продукции третьего вида экономически не выгодно. Объёмы производства продукции первого и второго вида задаются коэффициентами целевой функции двойственной задачи в оптимальной точке.

Согласно первой теореме двойственности, выручка от продажи продукции — 1400.

2.3 Нелинейное программирование

Постановка задачи: определить тип точки $(1, 2)$ для функций

$$f_1(x_2, x_2) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 \tag{1a}$$
$$f_2(x_2, x_2) = -(x_1 - 1)^2 - (x_2 - 2)^2 \tag{1b}$$
$$f_3(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^2 - (x_2 - 2)^2 \tag{1c}$$

Решение: значения частных производных

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 2x_1 - 2, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 2x_2 - 4 \tag{2a}$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = -2x_1 + 2, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -2x_2 + 4 \tag{2b}$$
$$\frac{\partial f_3}{\partial x_1} = 2x_1 - 2, \quad \frac{\partial f_3}{\partial x_2} = -2x_2 + 4 \tag{2c}$$

в точке $(1, 2)$ равны нулю, следовательно, это — стационарная точка.

Матрица вторых производных функции f_1 положительно определена:

$$(h_1, h_2)\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 2h_1^2 + 2h_2^2 > 0 \text{ при } (h_1, h_2) \neq 0,$$

следовательно, $(1, 2)$ — точка минимума.

Матрица вторых производных функции f_2 определена отрицательно

$$(h_1, h_2)\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = -2h_1^2 - 2h_2^2 < 0 \text{ при } (h_1, h_2) \neq 0,$$

и $(1, 2)$ — точка максимума.

Функция f_3 имеет знаконеопределённую матрицу вторых производных

$$(h_1, h_2)\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 2h_1^2 - 2h_2^2,$$

и $(1, 2)$ — седловая точка.

Постановка задачи

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \to \min, \quad x_1 + x_2 + x_3 = 3$$

Решение: функция Лагранжа:

$$L(x, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \lambda(x_1 + x_2 + x_3 - 3)$$

$$\begin{aligned} L_{x_1} = 2x_1 + \lambda \qquad &= 0 \\ L_{x_2} = 2x_2 + \lambda \qquad &= 0 \\ L_{x_3} = 2x_3 + \lambda \qquad &= 0 \\ L_\lambda = x_1 + x_2 + x_3 - 3 \qquad &= 0 \end{aligned}$$

$$\lambda = -2x_1 = -2x_2 = -2x_3$$

Решение:

$$x_1^* = x_2^* = x_3^* = 1, \quad \lambda^* = -2$$

Постановка задачи

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \to \min, \quad x_1 + x_2 + x_3 \geqslant 3$$

Решение: функция Лагранжа:

$$L(x, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \lambda(x_1 + x_2 + x_3 - 3)$$

$$\begin{aligned} L_{x_1} = 2x_1 + \lambda \qquad &= 0 \\ L_{x_2} = 2x_2 + \lambda \qquad &= 0 \\ L_{x_3} = 2x_3 + \lambda \qquad &= 0 \\ \lambda L_\lambda = \lambda(x_1 + x_2 + x_3 - 3) \qquad &= 0 \end{aligned}$$

Если $\lambda = 0$, то $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ и ограничение $x_1 + x_2 + x_3 \geqslant 3$ не выполняется. Поэтому

$$\lambda = -2x_1 = -2x_2 = -2x_3$$

Решение:

$$x_1^* = x_2^* = x_3^* = 1, \quad \lambda^* = -2$$