Обратные и некорректные задачи

Математическое моделирование

Математическая модель связывает

1. характеристики модели (пространство Y);
2. характеристики изучаемого объекта (функциональное пространство X).

$$y = G(x)$$

z — характеристики модели
u — характеристики наблюдаемого явления

$$Az = u$$

Оператор A считается заданным

Проблемы

1. Оператор $G = A^{-1}$, вообще говоря, явно не задан.
2. Область определения оператора $G = A^{-1}$ не совпадает, вообще говоря, со всем пространством.
3. Оператор A, определённый на области своего определения, разрывен.

Можно считать, что отображение $y = G(x)$ задано не на всём X, а на множестве $D_G \subset X$, причём отображение G разрывно на D_G.

Задача определения решения $y = G(x)$ из пространства Y по исходным данным $x \in X$ называется *устойчивой* на пространствах (Y, X), если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \colon \rho_X(x_1, x_2) \leqslant \delta(\varepsilon) \Rightarrow \rho_Y(y_1, y_2) \leqslant \varepsilon,$$

где

$$y_1 = G(x_1), \quad y_2 = G(x_2); \qquad x_1, x_2 \in X, \quad y_1, y_2 \in Y.$$

$A\colon Q \to F$
$\mathcal{O}(q)$ — окрестность элемента $q \in Q$
$D(A)$ — область определения, $R(A)$ — область значений оператора A

Корректность задачи, корректность по Адамару

Задача $Aq = f$ корректна на паре топологических пространств Q и F, если выполнены следующие три условия:

1. для любого элемента $f \in F$ существует решение $q_T \in Q$ уравнения $Aq = f$ (*условие существования решения*), т.е. $R(A) = F$;
2. решение q_T уравнения $Aq = f$ единственно в Q (*условие единственности решения*), т.е. существует обратный оператор $A^{-1}\colon F \to Q$;
3. для любой окрестности $\mathcal{O}(q_T) \subset Q$ решения q_T уравнения $Aq = f$ найдётся окрестность $\mathcal{O}(f) \subset F$ правой части f, такая, что при всех $f_\delta \in \mathcal{O}(f)$ элемент $A^{-1} f_\delta = q_\delta$ принадлежит окрестности q_T, т.е. оператор Q^{-1} непрерывен (*условие устойчивости решения*).

Задача $Aq = f$ некорректна на паре пространств Q и F, если хотя бы одно из трёх условий не выполнено.

Условная корректность, корректность по Тихонову

Задача $Aq = f$ называется *условно-корректной на множестве* M, если $f \in A(M)$ и выполнены следующие условия:

1. решение q_T уравнения $Aq = f$, $f \in A(M)$, единственно на множестве M;
2. для любой окрестности $\mathcal{O}(q_T)$ решения уравнения $Aq = f$ существует такая окрестность $\mathcal{O}(f)$, что при любом $f_\delta \in \mathcal{O}(f) \cap A(M)$ решение уравнения $Aq = f_\delta$ содержится в $\mathcal{O}(q_T)$ (условная устойчивость).

Множество M называется *множеством корректности задачи* $Aq = f$.

Пример.

Задача решения линейного алгебраического уравнения

$$Ay = x, \qquad y \in E_m, \quad x \in E_n$$

E_m, E_n — евклидовы пространства

1. Входные данные (с ошибками измерения) — x.
   $G(x)$ ставит в соответствие x решение в смысле метода наименьших квадратов y, обладающее минимальной нормой.
   G всюду определено в E_n и непрерывно — модель абсолютно корректна.
2. Входные данные — элементы матрицы A.
   $G(A, x)$ не будет непрерывным по A, если близость матриц оценивать в обычной операторной норме.
   Модель некорректна по отношению к возмущению матрицы.

Пример.

Операторное уравнение

$$Ay = x, \qquad y \in Y, \quad x \in X$$

Y, X — линейные нормированные пространства, A — вполне непрерывный оператор из Y в X.

1. $G = A^{-1}$ можно определить только на $D_G = AY$ (в случае бесконечной размерности пространств $D_G \neq X$)
2. $G = A^{-1}$ неограниченно на $D_G = AY$

Если в Y априори выделить компактное множество $M \subset Y$, то отображение $G = A^{-1}$, определённое на $D = AM \subset D_G$ относительно непрерывно, т.е. задача условно корректна на $D = AM \subset D_G$.

Решение задачи

$$Ay = x$$

относительно y, где $x \in X$, $x \in Y$.

Y, X — метрические пространства.
Оператор A отображает Y на X.

Предполагается, что существует обратный оператор A^{-1}, но он, вообще говоря, не является непрерывным.

$Ay = x$ — операторное уравнение первого рода

Метод подбора

Для элементов y некоторого заранее заданного подкласса всевозможных решений M $(M \subset Y)$ вычисляется Ay.

В качестве приближённого решения берётся такой элемент $\tilde{y} \in M$, на котором невязка $\rho_X(Ay, x)$ достигает минимума:

$$\rho_X(A\tilde{y}, x) = \inf_{y \in M} \rho_X(Ay, x).$$

Обычно в качестве M берётся множество элементов y, зависящих от конечного числа параметров, меняющихся в ограниченных пределах, чтобы M было замкнутым подмножеством конечномерного пространства.

y_T — точное решение

1. $y_T \in M$: $\inf_{y \in M} \rho_X(Ay, x) = 0$.
2. Если уравнение имеет единственное решение, то элемент $\tilde{y}$ определён однозначно.

Метод подбора

Теорема

Пусть X и Y — метрические пространства, $M \subset X$ — компактно. Предположим, что отображение A взаимно однозначно отображает M на $A(M) \subset Y$. Тогда, если A непрерывно, то и обратное отображение

$$A^{-1}\colon A(M) \to M$$

тоже непрерывно.

Метод подбора

Пусть X и Y — метрические пространства, множество $M \subset X$ — компакт, а оператор $A\colon X \to Y$ взаимно однозначно отображает M на $A(M) \subset Y$ и непрерывен. Функцию

$$\omega(\delta) = \sup_{\substack{y_1, y_2 \in A(M) \\ \rho_Y(y_1, y_2) \leqslant \delta}} \rho_X(A^{-1}y_1, A^{-1}y_2)$$

будем называть *модулем непрерывности* оператора A^{-1} на множестве $A(M)$.

Пусть $x_T \in M$ — точное решение задачи $Ax = y$, а $x_\delta \in M$ — решение задачи $Ax = y_\delta$ и $\|y - y_\delta\| \leqslant \delta$. Тогда, если M — компакт, то $\|x_T - x_\delta\| \leqslant \omega(\delta)$.

Квазирешение

$$Ay = x$$

A — вполне непрерывный.

Построение устойчивого к малым возмущениям правой части решения уравнения

$$y = A^{-1}x$$

возможно в тех случаях, когда решение ищется на компакте $M \subset Y$ и $x \in AM$.

В практических задачах часто вместо точного значения правой части x_T известно только её приближённое значение $\tilde{x}$, которое может не принадлежать множеству AM.

Квазирешение

Элемент $\tilde{y} \in M$, минимизирующий при данном x функционал $\rho_X(Ay, x)$ на множестве M, называется *квазирешением* уравнения $Ay = x$ на M:

$$\rho_X(A\tilde{y}, x) = \inf_{y \in Y} \rho_X(Ay, x).$$

Если M — компакт, то квазирешение существует для любого $x \in X$ и если, кроме того, $x \in AM$, то квазирешение совпадает с обычным (точным) решением уравнения $Ay = x$.

Квазирешение может быть не одно. В этом случае квазирешение — любой элемент из множества квазирешений.

Квазирешение

Пусть $y \in Y$ и $Q \subset Y$. Элемент $q \in Q$ называется *проекцией* элемента y на множество Q, $q = Py$, если

$$\rho_Y(y, q) = \rho_Y(y, Q),$$

где

$$\rho_Y(y, Q) = \inf_{h \in Q} \rho_Y(y, h).$$

Теорема

Если уравнение $Ay = x$ может иметь на компакте M не более одного решения и проекция каждого элемента $x \in X$ на множество AM единственна, то квазирешение уравнения $Ay = x$ единственно и непрерывно зависит от правой части x.

Квазирешение

Теорема

Пусть уравнение $Ay = x$ линейно, однородное уравнение $Ay = 0$ имеет только нулевое решение, множество M выпукло, а всякая сфера в пространстве X строго выпукла. Тогда квазирешение уравнения $Ay = x$ на компакте M единственно и непрерывно зависит от правой части x.

Квазирешение

M — выпуклый компакт.
Сфера в пространстве X строго выпукла.

$$M_1 \subset M_2 \subset \cdots \subset M_n \subset$$

— возрастающая цепочка компактных замкнутых множеств M_n, такая, что замыкание их объединения $\cup_{n=1}^{\infty} M_n$ совпадает с M.

Квазирешение $Ay = x$ существует на всяком множестве M_n. T_n — множество квазирешений на M_n.

В качестве приближения к квазирешению $\tilde{y} \in M$ можно брать любой элемент $\tilde{y}_n \in T_n$. При этом

$$\lim_{n \to \infty} \rho_Y(\tilde{y}, \tilde{y}_n) = 0.$$

Квазирешение

$X \equiv Y \equiv H$ — гильбертовы пространства.
A — линейный, ограниченный, положительный и самосопряжённый оператор.
$S_R = \{x \mid \|x\| \leqslant R,\ x \in H\}$ — шар радиуса R
B — вполне непрерывный оператор, определённый на S_R при любом $R > 0$
В качестве класса корректности M берётся множество $D_R = BS_R$.

Предполагается, что искомое точное решение y_T уравнения $Ay = x$ с правой частью $x = x_T$ существует и принадлежит множеству D_R.

Метод М. М. Лаврентьева

Уравнение $Ax = y$ заменяется близким к нему уравнением

$$Ax + \alpha x = y, \quad \alpha > 0.$$

Решение

$$x_\alpha = (A + \alpha I)^{-1} y$$

при соответствующем выборе параметра α принимается за приближённое решение уравнения $Ax = y$.

I — тождественный оператор.

$R_\alpha = (A + \alpha I)^{-1}$ — семейство регуляризирующих операторов

$$Ay = x$$

1. Множество M всевозможных решений уравнения не является компактом.
2. Изменения правой части уравнения, связанные с её приближённым характером, могут выводить её за пределы AM.

Такие задачи называются *существенно некорректными*.

$\tilde{x}$ — приближённое значение $A^{-1}y$, если $\rho_Y\left(\tilde{y}, A^{-1}x\right)$ «мало».

Приближённые данные об x — пара (x_δ, δ), где

$$\rho_X(x, x_\delta) \leqslant \delta.$$

x_δ не обязательно принадлежит $D_G = AM$.

Для большого класса отображений принципиально невозможно получить в качестве приближённого значения $A^{-1}x$ пару $(y_\varepsilon, \varepsilon)$, где

$$\rho_Y(y, y_\varepsilon) \leqslant \varepsilon.$$

Для решения задачи приближённого нахождения $A^{-1}x$ строятся некоторые аппроксимирующие отображения $R(x, \delta)$ $(R_\delta(x))$, явно заданные на всём X.

$G = A^{-1}$ — отображение, определённое на некотором подмножестве $D(G) \subseteq X$ метрического пространства X и действующее в метрическое пространство Y, причём $G(D(G)) \subseteq Y$.

Погрешность решения задачи вычисления $G(x)$ при фиксированном $\delta > 0$ и заданном априори R_δ:

$$\Delta(R_\delta, \delta, x) = \sup_{\rho_X(x, x_\delta) \leqslant \delta} \rho_Y\big(R_\delta(x_\delta), G(x)\big).$$

Функция G называется *регуляризируемой* (по Тихонову) на D_G в X (или на непустом подмножестве $D \subseteq D_G$), если существует отображение $R_\delta(\cdot)$ (или, что то же самое, $R(\cdot, \delta)$), действующее из прямого произведения $X \times \mathbb{R}^1_+$ в Y, такое, что

$$\lim_{\delta \to 0} \Delta(R_\delta, \delta, x) = 0, \qquad \forall x \in D_G \quad (\forall x \in D).$$

$R_\delta(x)$ — регуляризирующий алгоритм (регуляризирующий оператор) для вычисления $G(x)$.

Оператор $R(x,\delta)$ действующий из пространства X в пространство Y, назвается *регуляризирующим* для уравнения $Ay = x$ (относительно элемента x_T), если он обладает следующими свойствами

1. $\exists \delta_1 > 0$ такое, что оператор $R(x,\delta)$ определён для всякого δ, $0 \leqslant \delta \leqslant \delta_1$ и для любого $x_\delta \in X$ такого, что $\rho_X(x_\delta, x_T) \leqslant \delta$;
2. для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon, u_T) \leqslant \delta_1$ такое, что из неравенства
$$\rho_X(x_\delta, x_T) \leqslant \delta \leqslant \delta_0$$
следует неравенство
$$\rho_Y(y_\delta, y_T) \leqslant \varepsilon,$$
где $y_\delta = R(x,\delta)$.

Если $R_\delta(\cdot)$ — регуляризирующий алгоритм, то $R_\delta(x_\delta)$ — приближённое решение задачи вычисления $G(x)$ по данным (x_δ, δ).

Теорема

Отображение G регуляризируемо на D (D_G) семейством $R_\delta = R(\cdot, \delta) \equiv R_\delta(\cdot)$, $0 < \delta \leqslant \delta_0$, тогда и только тогда, когда оно продолжается на всё X так, что продолжение непрерывно на D (D_G) в X.

(x_δ, δ) — минимальная информация, при которой можно говорить о приближённом нахождении G.

В общем случае невозможно оценить меру близости $R_\delta(x_\delta)$ к $G(x)$ без дополнительной информации об x.

В общем случае регуляризационный алгоритм гарантирует лишь асимптотическую сходимость приближённого решения к точному при $\delta \to 0$.

Градиентные методы

Исходное уравнение (задача)

$$Ax = y$$

заменяется задачей поиска минимума целевого функционала

$$J(x) = \|Ax - f\|^2.$$