

# Численные методы

## Решение двухточечной краевой задачи

$$y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t)$$

$$y''(t) = f(t, y(t), y'(t))$$

$$y(t_0) = y_0, \quad y(t_{n+1}) = y_{n+1}$$

$$\begin{aligned}y_1'(t) &= y_2(t), & y_1(t_0) &= y_0, \\y_2'(t) &= f(t, y_1(t), y_2(t)), & y_2(t_0) &= \alpha.\end{aligned}$$

$$y_1(t_{n+1} \mid \alpha) = y_{n+1}$$

# Метод конечных разностей

## Линейное уравнение

$$y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t)$$

$$t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1}, \quad t_{i+1} - t_i = h, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

$$a(t_i) = a_i, \quad b(t_i) = b_i, \quad c(t_i) = c_i$$

$$y''(t_i) \approx \frac{y(t_{i+1}) - 2y(t_i) + y(t_{i-1}))}{h^2}, \quad y'(t) \approx \frac{y(t_{i+1}) - y(t_{i-1}))}{2h}$$

$$\begin{aligned} 2y_{i+1} - 4y_i + 2y_{i-1} + a_i h (y_{i+1} - y_{i-1}) + 2b_i h^2 y_i &= \\ = y_{i+1} (2 + a_i h) + y_i (b_i h^2 - 4) + y_{i-1} (2 - a_i h) &= \\ = 2c_i h^2, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

# Метод конечных разностей

## Реализация

```
function [T,Y] = de_fd (a,b,c,l,r,n,yl,yr)
    h = (r-l)/(n+1);
    A = zeros(3,n);
    B = zeros(1,n);

    t = l+h;
    for i=1:n
        A(1,i) = 2-a(t)*h; # трёхдиагональная матрица A
        A(2,i) = b(t)*h^2-4;
        A(3,i) = 2+a(t)*h;
        B(i) = 2*c(t)*h^2; # вектор правой части B

        t = t+h;
    end
    B(1) = B(1) - A(1,1)*yl;
    B(n) = B(n) - A(3,n)*yr;
```

# Метод конечных разностей

## Реализация

```
for i=1:(n-1)                                # прямая прогонка
    cf = A(1,i+1)/A(2,i);
    A(2,i+1) = A(2,i+1) - cf*A(3,i);
    B(i+1) = B(i+1) - cf*B(i);
end

B(n) = B(n) / A(2,n);                        # обратная прогонка
for i=(n-1):-1:1
    B(i) = (B(i) - A(3,i)*B(i+1)) / A(2,i);
end

T = 1:h:r;
Y = [y1,B,yr];
endfunction
```

# Метод конечных разностей

## Пример

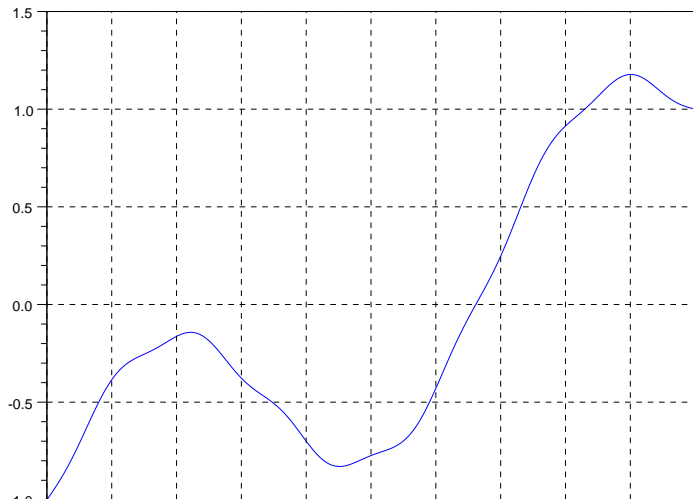
$$\ddot{y}(t) - \dot{y}(t) + y(t) = -50 \sin(3\pi t) + 70 \sin(15\pi t)$$
$$y(0) = -1, \quad y(1) = 1$$

```
function res = a(t)
    res = -1;
endfunction
function res = b(t)
    res = 1;
endfunction
function res = c(t)
    res = -50*sin(3*pi*t)+70*sin(15*pi*t);
endfunction

[T,Y] = de_fd(a,b,c,0,1,1000,-1,1);
plot(T,Y); grid on
```

# Метод конечных разностей

## Пример





$$y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t), \quad 0 \leq t \leq 1,$$
$$y(0) = \alpha, \quad y(1) = \beta$$

Приближённое решение ищется в виде

$$\tilde{y}(t) = \sum_{i=1}^n d_i u_i(t) + u_0(t)$$

$$y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t), \quad 0 \leq t \leq 1,$$
$$y(0) = \alpha, \quad y(1) = \beta$$

Приближённое решение ищется в виде

$$\tilde{y}(t) = \sum_{i=1}^n d_i u_i(t) + u_0(t)$$

$$u_i(0) = u_i(1) = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$
$$u_0(0) = \alpha, \quad u_0(1) = \beta.$$

$$y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t), \quad 0 \leq t \leq 1,$$
$$y(0) = \alpha, \quad y(1) = \beta$$

Приближённое решение ищется в виде

$$\tilde{y}(t) = \sum_{i=1}^n d_i u_i(t) + u_0(t)$$

- $u_i(t) = \sin(i\pi t)$ ,  $i = 1, \dots, n$
- $u_i(t) = t^i(1 - t)$ ,  $i = 1, \dots, n$

$$y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t), \quad 0 \leq t \leq 1,$$
$$y(0) = \alpha, \quad y(1) = \beta$$

Приближённое решение ищется в виде

$$\tilde{y}(t) = \sum_{i=1}^n d_i u_i(t) + u_0(t)$$

$$u_0(t) = \alpha(1 - t) + \beta t$$

# Проекционные методы

## Метод коллокации

$$0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq 1$$

Приближённое решение должно удовлетворять дифференциальному уравнению в узлах сетки  $t_i$ :

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \left( \sum_{i=1}^n d_i u_i(t_j) + u_0(t_j) \right) + \\ + a(t_j) \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^n d_i u_i(t_j) + u_0(t_j) \right) + \\ + b(t_j) \left( \sum_{i=1}^n d_i u_i(t_j) + u_0(t_j) \right) = c(t_j), \end{aligned}$$

$$j = 1, \dots, n.$$

# Метод коллокации

## Пример

```
Digits:=30:
a:= t-> -1:
b:= t-> 1:
c:= t-> -50*sin(3*Pi*t)+70*sin(15*Pi*t):

yl := -1:
yr := 1:

S1 := rhs(dsolve(diff(x(t),t,t) + a(t)*diff(x(t),t) +
                  b(t)*x(t) = c(t),x(t))):
S2 := fsolve({subs(t=0,S1=yl),subs(t=1,S1=yr)});
Y := subs(S2,S1):
```

# Метод коллокации

## Пример

```
YF:=[]:
```

```
for n from 10 to 40 by 10 do
```

```
  C:=[seq(cat('c',i),i=1..n)]:
```

```
  f:=sum(C[i]*sin(i*Pi*t),i=1..n) + y1*(1-t)+yr*t:
```

```
  e := diff(f,t,t) + a(t)*diff(f,t) + b(t)*f = c(t):
```

```
  h := 1/(n-1):
```

```
  T := [seq(h*i,i=0..n-1)]:
```

```
  S:=fsolve({seq(subs(t=T[i],e),i=1..n)},{C[]}):
```

```
  F:=subs(S,f):
```

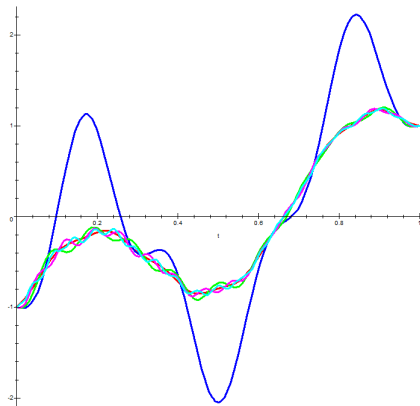
```
  YF:=[YF[],F]:
```

```
od:
```

# Метод коллокации

## Пример

```
plot([Y,YF[]],t=0..1,thickness=3,  
      color=[red,blue,green,magenta,cyan]);
```





Невязка

$$r(t) = \tilde{y}''(t) + a(t)\tilde{y}'(t) + b(t)\tilde{y}(t) - c(t)$$

должна быть ортогональна любой базисной функции  $u_i$ :

$$\int_0^1 r(t)u_i(t) dt = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$