Численные методы

Решение дифференциальных уравнений: задача Коши

Задача Коши

$$x'(t) = f\big(t, x(t)\big), \quad x(t_0) = x_0$$

Задача Коши

$$x'(t) = f\big(t, x(t)\big), \quad x(t_0) = x_0$$

$$x^{(n)}(t) = f\big(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n-1)}(t)\big)$$

$$x(t_0) = x_{0,0}, x'(t_0) = x_{0,1}, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = x_{0,n-1}$$

Задача Коши

$$x'(t) = f\big(t, x(t)\big), \quad x(t_0) = x_0$$

$$x^{(n)}(t) = f\big(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n-1)}(t)\big)$$
$$x(t_0) = x_{0,0}, x'(t_0) = x_{0,1}, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = x_{0,n-1}$$

$$y_1(t) = x(t), y_2(t) = x'(t), \dots, y_n(t) = x^{n-1}(t)$$

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= y_2(t), & y_1(t_0) &= x_{0,0} \\ y_2'(t) &= y_3(t), & y_2(t_0) &= x_{0,1} \\ &\dots & &\dots \\ y_n'(t) &= f\big(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)\big), & y_n(t_0) &= x_{0,n-1} \end{aligned}$$

- Одношаговые методы

$$x_{n+1} = \phi(t_n, x_n)$$

- Многошаговые методы
  - явные (Адамса–Башфорта)

$$x_{n+1} = \phi(t_n, x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-k})$$

  - неявные (Адамса–Моултона)

$$x_{n+1} = \phi(t_n, x_{n+1}, x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-k})$$

  - прогноза и коррекции

Тестовая задача

Модель Лотка–Вольтерра «хищник–жертва»

$$
\begin{aligned}
r'(t) &= 2r(t) - \alpha r(t) f(t), & r(0) &= r_0, \\
f'(t) &= -f(t) + \alpha r(t) f(t), & f(0) &= f_0
\end{aligned}
$$

$$\alpha = 0.01, \quad r_0 = 300, \quad f_0 = 150$$

```
function res = PP(t,x)
    alpha = 0.01;
    r = x(1);
    f = x(2);
    res = [2*r-alpha*r*f; ...
           -f+alpha*r*f];
endfunction
```

$$t_0 < t_1 < \cdots < t_N$$

$$x(t_{i+1}) = x(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f\big(t, x(t)\big)\, dt$$

Аппроксимация значения интеграла методом левых прямоугольников:

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} f\big(t, x(t)\big)\, dt = h_i \cdot f\big(t_i, x(t_i)\big) + O(h_i), \quad h_i = t_{i+1} - t_i$$

$$x(t_{i+1}) \approx x(t_i) + h_i \cdot f\big(t_i, x(t_i)\big)$$

$x_i \approx x(t_i)$

Явный метод Эйлера

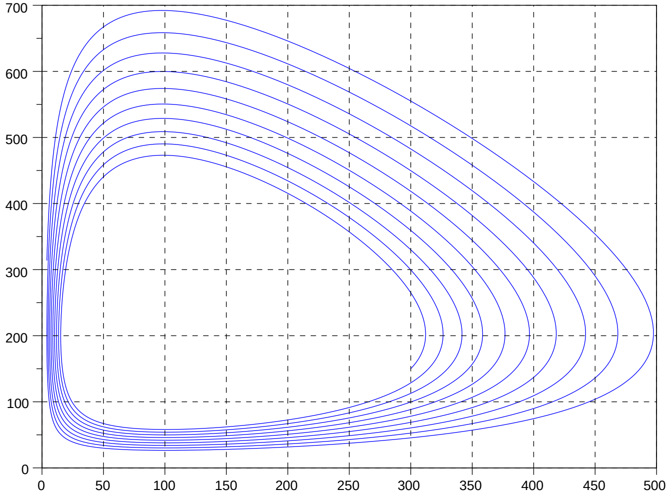
$$x_{i+1} = x_i + h_i f(t_i, x_i), \quad i = 0, 1, \ldots, N-1$$
$$x(t_0) = x_0$$

```
function res = EulerE(t,x,f,h)
    res = x + h*f(t,x);
endfunction

n = 5000;              h = 0.01;
x0 = [300;150];        t0 = 0;

x = zeros(2,n+1);      x(:,1) = x0;
for i=1:n
    x(:,i+1) = EulerE(t0+(i-1)*h,x(:,i),PP,h);
end

plot(x(1,:),x(2,:)); set(gca(),"grid",[1,1])
```


700
600
500
400
300
200
100
0
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500

Аппроксимация значения интеграла методом правых прямоугольников:

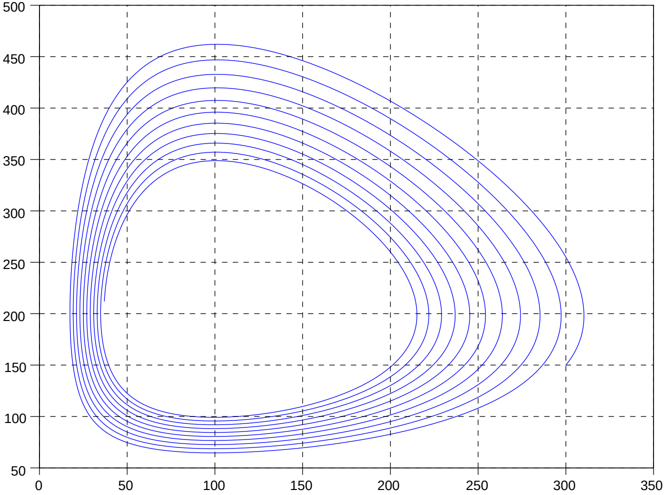
$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} f\big(t, x(t)\big)\, dt = h_i \cdot f\big(t_{i+1}, x(t_{i+1})\big) + O(h_i)$$

Неявный метод Эйлера

$$x_{i+1} = x_i + h_i f(t_{i+1}, x_{i+1}), \quad i = 0, 1, \ldots, N-1$$
$$x(t_0) = x_0$$

```
function res = EulerI(t,x,f,h)
    deff("res␣=␣fn(y)", ...
         "res␣=␣y-(x+h*f(t,y))")

    res = fsolve(x,fn);
endfunction
```


500
450
400
350
300
250
200
150
100
50
0
50
100
150
200
250
300
350

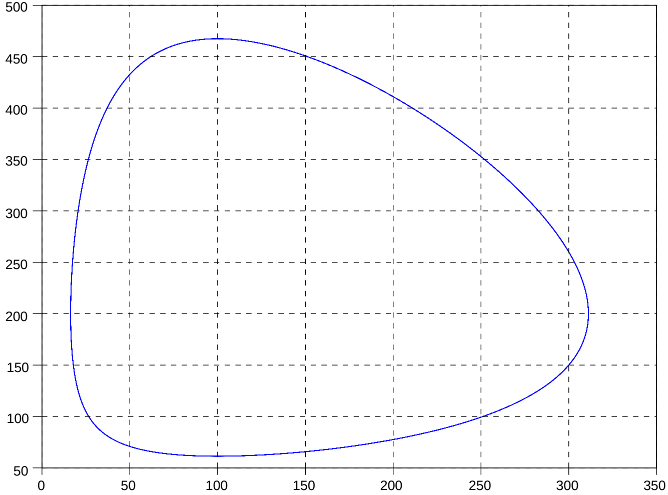
Аппроксимация значения интеграла методом трапеций:

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} f\big(t, x(t)\big)\, dt = h_i \cdot \frac{f\big(t_i, x(t_i)\big) + f\big(t_{i+1}, x(t_{i+1})\big)}{2} + O(h^2)$$

Метод Хьюна (метод Эйлера–Коши)

$$K_1 = f(t_i, x_i)$$
$$K_2 = f\big(t_{i+1}, x_i + h_i f(t_i, x_i)\big)$$
$$x_{i+1} = x_i + \frac{h_i}{2}(K_1 + K_2), \quad i = 0, 1, \ldots, N-1$$
$$x(t_0) = x_0$$

```
function res = Heun(t,x,f,h)
    K1 = f(t,x);
    K2 = f(t+h,x+h*K1);
    res = x+h/2*(K1+K2);
endfunction
```


500
450
400
350
300
250
200
150
100
50
0
50
100
150
200
250
300
350

Аппроксимация значения интеграла методом средних прямоугольников:

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} f\big(t,(t)\big)\,dt = h_i \cdot f\big(t_i + h_i/2, x(t_i + h_i/2)\big) + O(h^2)$$

Метод Рунге–Кутты второго порядка

$$K = f(t_i, x_i)$$

$$x_{i+1} = x_i + h_i f\left(t_i + \frac{h_i}{2}, x_i + \frac{h_i}{2}K\right), \quad i = 0, 1, \ldots, N-1$$

$$x(t_0) = x_0$$

Методы Рунге–Кутты

Метод Рунге–Кутты четвёртого порядка

$$
\begin{aligned}
K_1 &= f(t_i, x_i),\\
K_2 &= f\left(t_i + \frac{h_i}{2}, x_i + \frac{h_i}{2}K_1\right),\\
K_3 &= f\left(t_i + \frac{h_i}{2}, x_i + \frac{h_i}{2}K_2\right),\\
K_4 &= f(t_i + h_i, x_i + h_i K_3),\\
x_{i+1} &= x_i + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)
\end{aligned}
$$

Методы Рунге–Кутты

Методы Рунге–Кутта порядка p требуют

- p вычислений функции f при $2 \leqslant p \leqslant 4$;
- $p+1$ вычислений при $5 \leqslant p \leqslant 7$;
- $p+2$ вычислений при $p \geqslant 8$.

Методы с контролем точности на каждом шаге

$$y(t+2h) = y_1 + (2h)^5\psi + O(h^6)$$
$$y(t+2h) = y_2 + 2h^5\psi + O(h^6)$$

$\psi \sim y^{(5)}/5!$

$$\Delta \equiv y_2 - y_1 = 30h^5\psi + O(h^6)$$
$$y(t+2h) = y_2 + \frac{\Delta}{15} + O(h^6)$$

Точность *пятого* порядка. Но нельзя оценить значение точности.

Методы с контролем точности на каждом шаге

Формула Рунге–Кутты–Фелберга

$$
\begin{aligned}
k_1 &= h_i f(t_i, y_i),\\
k_2 &= h_i f(t_i + a_2 h_i, y_i + b_{21} k_1),\\
&\dots\\
k_6 &= h_i f(t_i + a_6 h_i, y_i + b_{61} k_1 + \dots + b_{65} k_5),\\
y_{i+1} &= y_i + c_1 k_1 + \dots + c_6 k_6 + O(h_i^6),\\
y^*_{i+1} &= y_i + c^*_1 k_1 + \dots + c^*_6 k_6 + O(h_i^5)
\end{aligned}
$$

$$\Delta \equiv y_{i+1} - y^*_{i+1}$$

Методы с контролем точности на каждом шаге

i	a_i	b_{ij}					c_i	c_i^*
1							$\frac{37}{378}$	$\frac{2825}{27648}$
2	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$					0	0
3	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{9}{40}$				$\frac{250}{621}$	$\frac{18575}{48384}$
4	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$	$-\frac{9}{10}$	$\frac{6}{5}$			$\frac{125}{594}$	$\frac{13525}{55296}$
5	1	$-\frac{11}{54}$	$\frac{5}{2}$	$-\frac{70}{27}$	$\frac{35}{27}$		0	$\frac{277}{14336}$
6	$\frac{7}{8}$	$\frac{1631}{55296}$	$\frac{175}{512}$	$\frac{575}{13824}$	$\frac{44275}{110592}$	$\frac{253}{4096}$	$\frac{512}{1771}$	$\frac{1}{4}$

Если получена оценка Δ_1 при шаге h_1, то для Δ_0 требуется взять шаг

$$h_0 = h_1 \left| \frac{\Delta_0}{\Delta_1} \right|^{0.2}$$

Многошаговые методы

$$x(t_{i+1}) - x(t_i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} x'(t)\,dt =$$

$$= \int_{t_i}^{t_{i+1}} f\big(t, x(t)\big)\,dt \approx \int_{t_i}^{t_{i+1}} p(t)\,dt$$

$p(t)$ — многочлен, интерполирующий функцию $x'(t)$.
Предполагаем, что узлы расположены равномерно с шагом h.

N — степень интерполирующего многочлена

$N = 0$: метод Эйлера.

$N = 1$: p — линейная функция, проходящая через точки (t_{i-1}, f_{i-1}) и (t_i, f_i):

$$p(t) = f_{i-1} + \frac{f_i - f_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}(t - t_{i-1}) = f_{i-1}\frac{t - t_i}{t_{i-1} - t_i} + f_i\frac{t - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}},$$

где $f_i = f(t_i, x_i)$.

Второй порядок точности

$$x_{i+1} = x_i + \frac{h}{2}(3f_i - f_{i-1})$$

$N = 2$: p — квадратичная функция, интерполирующая (t_{i-2}, f_{i-2}), (t_{i-1}, f_{i-1}) и (t_i, f_i).

Третий порядок точности

$$x_{i+1} = x_i + \frac{h}{12}(23f_i - 16f_{i-1} + 5f_{i-2})$$

$N = 3$:

Четвёртый порядок точности

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}(55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3})$$

При построении интерполирующего многочлена можно использовать и точки t_{i+1}, t_{i+2}, ...

Если используются точки $t_{i-N}, t_{i-N+1}, \ldots, t_i, t_{i+1}$ (интерполирующий многочлен степени $N+1$), то получаемые формулы называются формулами Адамса–Моултона.

$N = 0$: p — линейная функция

Второй порядок точности

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(f_{i+1} + f_i).$$

$N = 2$: p — кубический многочлен

Четвёртый порядок точности

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}(9f_{i+1} + 19f_i - 5f_{i-1} + f_{i-2}).$$

Метод прогноза и коррекции

$$y^*_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}(55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3})$$
$$f^*_{i+1} = f(t_{i+1}, y^*_{i+1})$$
$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}(9f^*_{i+1} + 19f_i - 5f_{i-1} + f_{i-2}).$$

Жёсткие системы уравнений

$$
\begin{aligned}
x_1' &= 998x_1 + 1998x_2 \qquad\qquad & x_1(0) &= 1 \\
x_2' &= -999x_1 - 1999x_2 \qquad\qquad & x_2(0) &= 0
\end{aligned}
$$

Точное решение:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 2e^{-t} - e^{-1000t} \\
x_2 &= -e^{-t} + e^{-1000t}
\end{aligned}
$$

Для того, чтобы любой явный метод был стабилен, требуется, чтобы

$$h \ll \frac{1}{1000}.$$

Жёсткие системы уравнений

$$x' = -cx, \quad c = \text{const} > 0$$

Явный метод Эйлера

$$x_{i+1} = x_i + hx_i' = (1 - ch)x_i$$

$$h > \frac{2}{c} \quad \Rightarrow \quad |x_i| \to \infty \text{ при } i \to \infty$$

Неявный метод Эйлера

$$x_{i+1} = x_i + hx_{i+1}', \quad x_{i+1} = \frac{x_i}{1 + ch}$$

Метод абсолютно устойчив.

Жёсткие системы уравнений

Система дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (C — положительно определённая матрица)

$$x' = -Cx$$

Явный метод Эйлера

$$x_{i+1} = (1 - Ch)x_i$$

устойчив, только если наибольшее собственное число матрицы $E - Ch$ меньше 1:

$$h < \frac{2}{\lambda_{\max}}$$

Жёсткие системы уравнений

Система дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (C — положительно определённая матрица)

$$x' = -Cx$$

Неявный метод Эйлера

$$x_{i+1} = (1 + Ch)^{-1} x_i$$

Если λ — собственные числа матрицы C, то собственные числа матрицы $(E - Ch)^{-1}$:

$$(1 + \lambda h)^{-1} < 1.$$

Модель Солоу

Динамика основных фондов:

$$\frac{dK(t)}{dt} = -mK(t) + sF\big(t, K(t), L(t)\big).$$

Динамика трудовых ресурсов:

$$\frac{dL(t)}{dt} = \rho L(t) + \big(a(1-s) - b\big)F\big(t, K(t), L(t)\big).$$

Производственная функция:

$$F(t, K, L) = A_1 K^\alpha L^\beta + A_2 \sin(t).$$

Модель Солоу

1. Решить систему уравнений, нарисовать графики $K(t)$ и $L(t)$.
2. Показать зависимость решений от s.
3. Найти значение s, при котором интегральное среднедушевое потребление имеет максимальное значение:

$$\int_0^T \frac{(1-s)F\big(t, K(t), L(t)\big)}{L(t)} \mathrm{d}t \to \max .$$