# Численные методы

## Задачи линейной алгебры

# Матричные нормы

$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$$

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2} \qquad \text{Фробениуса}$$

$$\|A\|_p = \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_1}$$

$\lambda_1$ — наибольшее собственное число матрицы $A^\top A$

# Трансформации Гаусса

Приведение решения системы

$$Ax = f$$

с невырожденной матрицей $A$ к решению системы с симметричной положительно-определённой матрицей.

- Первая (левая) трансформация Гаусса:

$$A^\top A x = A^\top f$$

- Вторая (правая) трансформация Гаусса:

$$AA^\top y = f, \quad x = A^\top y$$

# Обусловленность матрицы

$$Ax = b \quad \Rightarrow \quad x = A^{-1}b$$

$$\det A \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \exists A^{-1}$$

$$a_{ij} \in [\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}]$$

# Обусловленность матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 & 5 \\ 7 & 10 & 8 & 7 \\ 6 & 8 & 10 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 10 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 68 & -41 & -17 & 10 \\ -41 & 25 & 10 & -6 \\ -17 & 10 & 5 & -3 \\ 10 & -6 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 1$$

Оценка Адамара:

$$|\det A| \leqslant \sqrt{\prod_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2} = \sqrt{2534437350} \approx 50000$$

# Обусловленность матрицы

$$A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 5+\varepsilon & 7 & 6 & 5 \\ 7 & 10 & 8 & 7 \\ 6 & 8 & 10 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\det A_\varepsilon = 1 + 68\varepsilon$$

При $\varepsilon = -\frac{1}{68} \approx -0.015$ матрица $A_\varepsilon$ становится вырожденной.

# Обусловленность матрицы

$A = (a_{ij}),\ A^{-1} = (\alpha_{ij})$

$$AA^{-1} = E \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial A}{\partial a_{ij}} A^{-1} + A \frac{\partial A^{-1}}{\partial a_{ij}} = 0$$

$$\frac{\partial A^{-1}}{\partial a_{ij}} = -A^{-1} \frac{\partial A}{\partial a_{ij}} A^{-1}, \qquad \frac{\partial A}{\partial a_{ij}} = e_{ij}$$

$$\frac{\partial A^{-1}}{\partial a_{ij}} = -A^{-1} e_{ij} A^{-1} = -A^{-1} e_{i1} e_{1j} A^{-1} =$$

$$= -\begin{pmatrix} \alpha_{1i}\alpha_{j1} & \alpha_{1i}\alpha_{j2} & \dots & \alpha_{1i}\alpha_{jn} \\ \alpha_{2i}\alpha_{j1} & \alpha_{2i}\alpha_{j2} & \dots & \alpha_{2i}\alpha_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{ni}\alpha_{j1} & \alpha_{ni}\alpha_{j2} & \dots & \alpha_{ni}\alpha_{jn} \end{pmatrix}$$

# Обусловленность матрицы

$$\frac{\partial \alpha_{kl}}{\partial a_{ij}} = -\alpha_{ki}\alpha_{jl}$$

$$d\alpha_{kl} = -\sum_{i,j} \alpha_{ki}\alpha_{jl} da_{ij}$$

# Обусловленность матрицы

Обратная матрица называется *устойчивой*, если малым изменениям в элементах матрицы соответствуют малые изменения в элементах обратной матрицы.

Матрица называется *плохо обусловленной*, если соответствующая ей обратная матрица неустойчива.

# Обусловленность матрицы

$$Ax = f, \quad x = A^{-1}f$$

$$\frac{\partial x_k}{\partial a_{ij}} = -\alpha_{ki}x_j, \qquad \frac{\partial x_k}{\partial f_i} = \alpha_{ki}$$

- Числа Тюринга:

$$N\text{-число} = \frac{1}{n} N(A) N(A^{-1}) = \nu(A)$$

$$M\text{-число} = \frac{1}{n} M(A) M(A^{-1}) = \mu(A)$$

$N(A) = \sqrt{\mathrm{Sp}\, A^\top A}$, $M(A) = n \cdot \max_{i,j} |a_{ij}|$

- Число Тодда:

$$P\text{-число} = \frac{\max|\lambda_i|}{\min|\lambda_i|} = \rho(A)$$

$\lambda_i$ — собственные числа матрицы $A$

- 

$$H\text{-число} = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

$$\tilde{A}x = f, \qquad \tilde{a}_{ij} = i.i.d(a_{ij}, \sigma^2), \quad \sigma^2 \ll a_{ij}$$

$N$-число обусловленности показывает, во сколько раз отношение стандартного отклонения ошибок неизвестных к стандартному отклонению самих неизвестных превосходит отношение стандартных отклонений ошибок коэффициентов системы к стандартным отклонениям самих коэффициентов.

$H$-число даёт отношение наибольшей полуоси к наименьшей полуоси для эллипсоида рассеяния вектора, компонентами которого являются ошибки неизвестных.

**Точные методы** — методы, которые дают решение задачи при помощи конечного числа арифметических операций.
Если исходные данные, определяющие задачу, известны точно и вычисления выполняются точно, то решение также получается точное.

**Итерационные методы** — средство для приближённого решения системы уравнений. Решение системы получается как предел последовательных приближений, вычисляемых некоторым единообразным методом.

- Схема единственного деления
  - Схема деления по главным компонентам
  - Схема деления с выбором наибольшего коэффициента в очередном столбце или строке
- Схема деления и вычитания
- Схема умножения и вычитания

```
n = 4;
A = rand(n,n)
b = rand(n,1)

M = [A,b];
for i = 1:n
  M(i,:) = M(i,:) / M(i,i);
  for j = 1:n
    if i==j continue end
    M(j,:) = M(j,:) - M(i,:)*M(j,i);
  endfor
endfor
x = M(:,n+1)
```

# Ортогональные матрицы

## Ортогональная матрица

Сумма квадратов элементов каждого столбца равна единице и суммы произведений соответствующих элементов из двух различных столбцов равны нулю.

$$A^\top A = E$$

- Единичная матрица ортогональна.
- Если $A$ — ортогональна, то $A^{-1} = A^\top$.
- Если $A$ — ортогональна, то $A^\top$ тоже ортогональна.
- Произведение двух ортогональных матриц есть ортогональная матрица.
- Определитель ортогональной матрицы равен $\pm 1$.

# Матрицы вращений

Элементарная матрица вращений

$$\begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

$$c_{21} = \frac{a_{11}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}}, \quad s_{21} = -\frac{a_{21}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}}$$

Если $a_{11} = a_{21} = 0$, то $c_{21} = 1$ и $s_{21} = 0$.

$$\begin{aligned} a_1' &= c_{21} a_1 - s_{21} a_2, \quad & f_1' &= c_{21} f_1 - s_{21} f_2 \\ a_2' &= s_{21} a_1 + c_{21} a_2, \quad & f_2' &= s_{21} f_1 + c_{21} f_2 \end{aligned}$$

Матрица отражений

$$U = E - 2WW^\top$$

вектор-столбца единичной длины $W$, ортогонального к заданной $(n-1)$-мерной плоскости $Q$.

Для перевода заданного вектора $S$ в вектор заданного направления $e$:

$$W = \frac{1}{\rho}(S - \alpha e)$$

$$\alpha = \pm|S|, \quad \rho = |S - \alpha e| = \sqrt{2\alpha^2 - 2\alpha(S, e)}, \quad \operatorname{sgn}\alpha = -\operatorname{sgn}(S, e)$$

Для любого вектора $Y$

$$UY = Y - 2(W, Y)W$$

# Вычисление определителей

$$\det A = a_{11} \times a_{22 \cdot 1} \times \cdots \times a_{nn \cdot n-1}$$

$$\Gamma A = U, \quad A = \Gamma^{-1} U = LU$$

$$a_{ij} = l_{ij} + \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj} = \sum_{k=1}^{j} l_{ik} u_{kj}, \quad i \geqslant j$$

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj} + l_{ii} u_{ij} = \sum_{k=1}^{i} l_{ik} u_{kj}, \quad i < j$$

# Метод квадратных корней

$A$ — симметричная матрица

$$A = S^{\top} S, \quad S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1n} \\ 0 & s_{22} & \dots & s_{sn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & s_{nn} \end{pmatrix}$$

$$s_{11} = \sqrt{a_{11}}, \quad s_{1j} = \frac{a_{1j}}{s_{11}}$$

$$s_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} s_{ki}^2}, \quad (i > 1), \qquad s_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} s_{ki} s_{kj}}{s_{ii}}, \quad (j > i)$$

$$s_{ij=0}, \quad (i > j)$$

# Метод квадратных корней

$$Ax = f$$

$$S^\top K = f \quad Sx = K$$

$$k_1 = \frac{f_1}{s_{11}}, \qquad k_i = \frac{f_i - \sum_{l=1}^{i-1} s_{li} k_l}{s_{ii}}, \quad (i > 1)$$

$$x_n = \frac{k_n}{s_{nn}}, \qquad x_i = \frac{k_i - \sum_{l=i+1}^{n} s_{il} x_l}{s_{ii}}, \quad (i < n)$$

# Обращение матрицы

$$AX = E, \quad X = A^{-1}$$

$$R_i = E - AD_i, \quad D_{i+1} = D_i(E + R_i)$$

Если $\|R_0\| \leqslant k < 1$, то

$$\|D_m - A^{-1}\| \leqslant \|D_0\| \frac{k^{2m}}{1-k}$$

$$D_m = D_{m-1} + D_{m-1}(E - AD_{m-1})$$

$$S = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \qquad S^{-1} = \begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix}$$

$A$ и $D$ — квадратные матрицы порядков $p$ и $q$: $p + q = n$

$$\begin{aligned} AK + BM &= E \\ AL + BN &= 0 \\ CK + DM &= 0 \\ CL + DN &= E \end{aligned}$$

$$S = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \qquad S^{-1} = \begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix}$$

$A$ и $D$ — квадратные матрицы порядков $p$ и $q$: $p + q = n$

$$\begin{aligned} K &= (A - BD^{-1}C)^{-1} \\ M &= -D^{-1}CK \\ N &= (D - CA^{-1}B)^{-1} \\ L &= -A^{-1}BN \end{aligned}$$

$$S = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \qquad S^{-1} = \begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix}$$

$A$ и $D$ — квадратные матрицы порядков $p$ и $q$: $p + q = n$

$$N = (D - CA^{-1}B)^{-1} \qquad M = -NCA^{-1}$$

$$L = A^{-1}BN \qquad K = A^{-1} - A^{-1}BM$$

$$K = (A - BD^{-1}C)^{-1} \qquad L = -KBD^{-1}$$

$$M = D^{-1}CK \qquad N = D^{-1} - D^{-1}CL$$

# Сингулярное разложение матрицы

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$$A = USV^\top$$

$U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ и $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — ортогональные матрицы, $S$ — диагональная матрица:

$$S = \text{diag}\left(\sigma_1, \ldots, \sigma_n\right) \text{ при } n \leqslant m$$

$$\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_n \geqslant 0$$

# Сингулярное разложение матрицы

$$Ax = b$$

1. $USV^\top x = b$
2. - $U^\top USV^\top x = U^\top b$
   - $SV^\top x = U^\top b$
   - $V^\top x = z$, $U^\top b = d$
   - $$z_i = \begin{cases} d_i/\sigma_i, & \sigma_i \gg 0, \\ 0, & \sigma_i \approx 0 \end{cases}$$
3. $x = Vz$

$$Ax = f \tag{1}$$

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} + Q^{(k)}(f - Ax^{(k-1)}) \tag{2}$$

Решение $x^*$ задачи (1) — неподвижная точка итерационного процесса (2).

$$Ax = f \tag{1}$$

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} + Q^{(k)}(f - Ax^{(k-1)}) \tag{2}$$

Всякий итерационный процесс

$$x^{(k)} = C^{(k)}x^{(k-1)} + z^{(k)},$$

для которого $x^*$ — неподвижная точка, может быть представлен в виде (2).

$$Ax = f \tag{1}$$

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} + Q^{(k)}(f - Ax^{(k-1)}) \tag{2}$$

Для того, чтобы $x^* - x^{(k)} \to 0$ для любого $x^{(0)}$, необходимо и достаточно, чтобы

$$(E - Q^{(k)}A)(E - Q^{(k-1)}A)\dots(E - Q^{(1)}A) \to 0.$$

- Стационарные процессы: $Q^{(k)} = Q$.
    - $Q = E$ — классический процесс последовательных приближений.
- Циклический процессы: $Q^{(k)}$ повторяются через $p$ шагов.
- Нестационарные процессы.
    - $Q^{(k)}$ изменяется на каждом шаге.
    - Стационарные процессы с ускорением сходимости.

- Наибольшая область сходимости процесса.
- Использование особенностей системы для получения наибольшей скорости сходимости.
- Принцип релаксации — на каждом шаге должна уменьшаться некоторая величина, характеризующая погрешность решения системы.
    - Координатные методы: на каждом шаге меняется одна или несколько компонент последовательных приближений.
    - Градиентные методы: матрицы $Q^{(k)}$ являются скалярными.
- Принцип «последовательного подавления компонент» вектора ошибки при разложении его по собственным векторам матрицы коэффициентов системы.

$$Ax = f \quad \Rightarrow \quad x = Bx + g$$

$$B = E - A, \quad g = f$$

$$x^{(k)} = Bx^{(k-1)} + g \tag{3}$$

### Условие сходимости

Для сходимости процесса последовательных приближений (3) при любом начальном векторе $x^{(0)}$ необходимо и достаточно, чтобы при все собственные значения матрицы $B$ были бы по модулю меньше единицы.

Если $\|B\| < 1$, то

$$\|x^* - x^{(k)}\| \leqslant \|B\|^k \|x^{(0)}\| + \frac{\|g\| \cdot \|B\|^k}{1 - \|B\|}$$

$$\|x^* - x^{(k)}\| \leqslant \|B\| \|x^* - x^{(k-1)}\|$$

$A$ — положительно определена
$\mu = \|A\|_1$, $Q = \frac{2}{\mu}E$

$$Ax = f \quad \Rightarrow \quad QAx = Qf$$

$$x = \left(E - \frac{2}{\mu}A\right)x + \frac{2}{\mu}f = Bx + g$$

Собственные значения $B$ находятся в $(-1, 1)$.

## Метод Якоби

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} \left( f_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)} \right)$$

# Итерационные методы решения систем линейных уравнений

## Одношаговый циклический процесс (метод Зейделя)

$$x = Bx + g$$

$$x_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} x_j^{(k)} + \sum_{j=i}^{n} b_{ij} x_j^{(k-1)} + g_i$$

# Методы полной релаксации

$A$ — положительно–определённая матрица

$$Ax = f$$

$x^*$ — точное решение
$x$ — некоторый вектор
$\mathcal{E}(x) = \langle Ay, y\rangle$ — функция ошибки, $y = x^* - x$

$$\mathcal{E}(x) = \langle x^* - x, f - Ax\rangle = \langle Ax, x\rangle - 2\langle x, f\rangle + \langle x^*, f\rangle = \mathcal{E}_0 + \langle x^*, f\rangle$$

Следует так изменить $i$-ю координату вектора $x$, чтобы для изменённого вектора $x'$ значение функции ошибки было бы наименьшим.

# Методы полной релаксации

$$x' = x + \alpha e_i, \quad y' = y - \alpha e_i$$

$$f(x') = f(x) + \frac{1}{a_{ii}}(a_{ii}\alpha - r_i)^2 - \frac{r_i^2}{a_{ii}} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{r_i}{a_{ii}}$$

$r_i$ — $i$-я компонента вектора невязки: $r = f - Ax$

$$\langle f - Ax', e_i \rangle = \langle f - Ax - \alpha A e_i, e_i \rangle =$$
$$= \langle f - Ax, e_i \rangle - \alpha \langle A e_i, e_e \rangle = r_i - \alpha a_{ii} = 0$$

Приближение $x'$ удовлетворяет $i$-му уравнению $Ax = f$.

## Метод Некрасова

На каждом шаге функция ошибки минимизируется за счёт изменения одной компоненты предыдущего решения, номера же этих компонент циклически чередуются от 1 до $n$.

# Методы полной релаксации

Если в методе Некрасова отказаться от цикличности в выборе изменяемых неизвестных, то получается группа *методов полной релаксации*.

# Методы неполной релаксации

На каждом шаге происходит уменьшение (а не минимизация, как в методах полной релаксации) функции ошибки.

$x' = x + \alpha e_i$

$$f(x') - f(x) = \frac{1}{a_{ii}}(a_{ii}\alpha - r_i)^2 - \frac{r_i^2}{a_{ii}}$$

$$(a_{ii}\alpha - r_i)^2 < r_i^2 \quad \Rightarrow \quad |a_{ii}\alpha - r_i| < |r_i|$$

$$\alpha = q\frac{r_i}{a_{ii}}, \quad 0 < q < 2$$

- $q = 1$ — методы полной релаксации
- $0 < q < 1$ — нижняя неполная релаксация
- $1 < q < 2$ — верхняя неполная релаксация

# Управление релаксацией

Процесс Зейделя — при переходе от $x^{(k-1)}$ к $x^{(k)}$ индекс $i_k$ выбирается так, чтобы $(r_{i_k}^{(k-1)})^2/a_{i_k i_k}$ было наибольшим среди всех чисел $(r_i^{(k-1)})^2/a_{ii}$, $i = 1, \dots, n$:

$$i_k = \arg\max_i \frac{|r_i^{(k-1)}|}{\sqrt{a_{ii}}}$$

Процесс Гаусса

$$i_k = \arg\max_i \frac{|r_i^{(k-1)}|}{a_{ii}}$$

Процесс Сауссела

$$i_k = \arg\max_i |r_i^{(k-1)}|$$

# Релаксация по длине вектора невязки

Минимизация или уменьшение длины вектора невязки за счёт изменения на каждом шаге одной компоненты предыдущего решения.

$$x' = x - \delta e_i, \quad r' = r - \delta A_i$$

$A_i$ — $i$-й столбец матрицы $A$

$$\langle r', r' \rangle = \langle r, r \rangle + \frac{1}{\langle A_i, A_i \rangle} \big( \langle r, A_i \rangle - \delta \langle A_i, A_i \rangle \big)^2 - \frac{\langle r, A_i \rangle^2}{\langle A_i, A_i \rangle}$$

$$x' = x + q \frac{\langle r, A_i \rangle}{\langle A_i, A_i \rangle} e_i$$

# Релаксация по длине вектора невязки

Метод релаксации по длине вектора невязки равносилен релаксационному методу по функции ошибки для системы

$$A^\top A x = A^\top y$$

# Групповая релаксация

Выделяется группа индексов $G$ и при переходе от $x$ к $x'$ изменяются только компоненты с индексами из выбранной группы $G$.

Уравнения, индексы которых входят в $G$, удовлетворяются точно:

$$\sum_{j \in G} a_{ij} x'_j = f_i - \sum_{m \notin G} a_{im} x_m$$

**Полная проблема собственных значений**

Нахождение всех собственных значений матрицы $A$ и всех собственных векторов.

Предварительное преобразование уравнения

$$\phi(t) = \det \begin{pmatrix} a_{11}-t & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-t & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-t \end{pmatrix} = 0$$

к виду

$$D(t) = \det \begin{pmatrix} b_{11}-t & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21}-t^2 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1}-t^n & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} = 0$$

$$
\begin{aligned}
tx_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\
tx_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\
&\dots \\
tx_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{gathered}
tx_1 = b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1n}x_n \\
t^2x_1 = b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \cdots + b_{2n}x_n \\
\cdots \\
t^nx_1 = b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + \cdots + b_{nn}x_n
\end{gathered}
$$

$$
\begin{aligned}
b_{1k} &= a_{1k} \\
b_{ik} &= \sum_{s=1}^{n} b_{i-1,s}a_{sk}, \qquad i = 2, \ldots, n, \quad k = 1, \ldots, n
\end{aligned}
$$

$B_i = (b_{i1}, b_{i2}, \ldots, b_{in})^\top$

$$B_0 = (1, 0, \ldots, 0)^\top$$
$$B_i = A^\top B_{i-1}, \quad i = 1, \ldots, n$$

$$B_0 = (b_{01}, b_{02}, \ldots, b_{0n})^\top$$
$$B_i = A^\top B_{i-1}, \quad i = 1, \ldots, n$$

$$u = b_{01}x_1 + b_{02}x_2 + \cdots + b_{0n}x_n$$
$$tu = b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1n}x_n$$
$$t^2u = b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \cdots + b_{2n}x_n$$
$$\ldots$$
$$t^nu = b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + \cdots + b_{nn}x_n$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & b_{01} & b_{02} & \dots & b_{0n} \\ t & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ t^2 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t^n & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} = 0$$

$$B_n = q_1 B_{n-1} + q_2 B_{n-2} + \dots + q_n B_0$$

$$\phi(t) = (-1)^n (t^n - p_1 t^{n-1} - \dots - p_n)$$

$$q_i = p_i, \quad i = 1, \dots, n$$

Определение собственных векторов

$C_0$ — исходный вектор
$X_1, \ldots, X_n$ — собственные векторы, принадлежащие $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$

$$C_0 = \alpha_1 X_1 + \cdots + \alpha_n X_n$$

$$\begin{aligned} C_1 &= AC_0 = \alpha_1\lambda_1 X_1 + \alpha_2\lambda_2 X_2 + \cdots + \alpha_n\lambda_n X_n \\ &\ldots \\ C_{n-1} &= A^{n-1}C_0 = \alpha_1\lambda_1^{n-1}X_1 + \alpha_2\lambda_2^{n-1}X_2 + \cdots + \alpha_n\lambda_n^{n-1}X_n \end{aligned}$$

Собственные векторы могут быть получены в виде линейных комбинаций

$$\beta_{i0}C_{n-1} + \beta_{i1}C_{n-2} + \cdots + \beta_{i,n-1}C_0, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\begin{aligned}
\beta_{10}C_{n-1} + \beta_{11}C_{n-2} + \cdots + \beta_{1,n-1}C_0 = \\
&= \alpha_1(\beta_{10}\lambda_1^{n-1} + \beta_{11}\lambda_1^{n-2} + \cdots + \beta_{1,n-1})X_1 + \\
&+ \alpha_2(\beta_{10}\lambda_2^{n-1} + \beta_{11}\lambda_2^{n-2} + \cdots + \beta_{1,n-1})X_2 + \\
&+ \cdots + \\
&+ \alpha_n(\beta_{10}\lambda_n^{n-1} + \beta_{11}\lambda_n^{n-2} + \cdots + \beta_{n,n-1})X_n = \\
&= \alpha_1\phi_1(\lambda_1)X_1 + \alpha_2\phi_1(\lambda_2)X_2 + \cdots + \alpha_n\phi_1(\lambda_n)X_n
\end{aligned}$$

$$\phi_1(\lambda_1) \neq 0, \quad \phi_1(\lambda_2) = \cdots = \phi_1(\lambda_n) = 0$$

$$\phi_1(t) = (t - \lambda_1)\dots(t - \lambda_n) = \frac{(-1)^n \phi(t)}{1 - \lambda_1}$$

$$\beta_{10} = 1, \qquad \beta_{1,j} = \lambda_1 \beta_{1,j-1} - p_j, \quad j = 1, \dots, n-1$$

$U_1, \ldots, U_n$ — базис из собственных векторов
$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — соответствующие собственные значения, упорядоченные по убыванию модулей
$|\lambda_1| > |\lambda_2|$

$Y_0$ — произвольный вектор

$$AY_0, A^2Y_0, \ldots, A^kY_0, \ldots$$

$$Y_0 = a_1U_1 + \cdots + a_nU_n$$
$$A^kY_0 = Y_k = a_1\lambda_1^kU_1 + \cdots + a_n\lambda_n^kU_n$$

$$U_i = (u_{1i}, u_{2i}, \dots, u_{ni})$$

$$y_{ik} = a_1 u_{i1} \lambda_1^k + a_2 u_{i2} \lambda_2^k + \dots + a_n u_{in} \lambda_n^k$$

$y_k$ — компонента $Y_k$ для которой $\lambda_1^k \neq 0$

$$y_k = c_1 \lambda_1^k + c_2 \lambda_2^k + \dots + c_n \lambda_n^k, \quad c_1 \neq 0$$

$$\frac{y_{k+1}}{y_k} = \frac{c_1 \lambda_1^{k+1} + c_2 \lambda_2^{k+1} + \dots + c_n \lambda_n^{k+1}}{c_1 \lambda_1^k + c_2 \lambda_2^k + \dots + c_n \lambda_n^k} =$$

$$= \lambda_1 \frac{1 + b_2 \alpha_2^{k+1} + \dots + b_n \alpha_n^{k+1}}{1 + b_2 \alpha_2^k + \dots + b_n \alpha_n^k}$$

$$b_l = \frac{c_i}{c_1}, \quad \alpha_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_0}$$