Численные методы

Приближение функций — 2

Шишкин Владимир Андреевич

Интерполяция

- Полиномиальная
  - Интерполяционный многочлен
  - Интерполяционный многочлен Эрмита
- Кусочно–полиномиальная
  - Сплайны
  - Кусочно–кубический многочлен Эрмита
- Дробно–полиномиальная интерполяция

Многомерная интерполяция

- Не любое число узлов интерполяции выгодно
- Иначе (по сравнению с одномерным случаем) определяется понятие экстраполяции
- Не всякое расположение узлов допустимо

Многомерная интерполяция

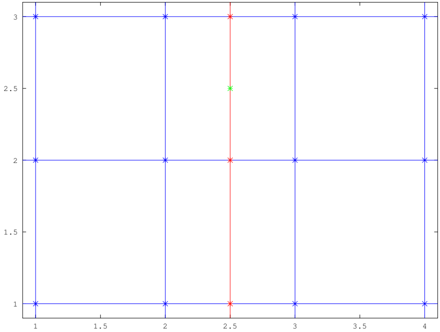
$$p_n(x,y) = \sum_{i+j=0}^{n} a_{ji} x^i y^j$$

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} \text{ узлов}$$

Многомерная интерполяция

Последовательная интерполяция

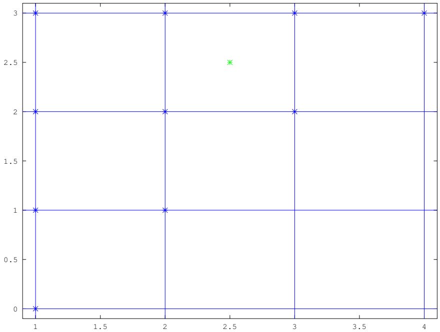
$$p_{nm}(x,y) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} z_{ij} \prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n}\prod_{\substack{l=0\\l\neq j}}^{m} \frac{(x-x_k)(y-y_l)}{(x_i-x_k)(y_j-y_l)}$$



Треугольная интерполяция

$$p_n(x,y) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i} z[x_0,\ldots,x_i;y_0,\ldots,y_j]\prod_{l=0}^{i-1}(x-x_l)\prod_{k=0}^{j-1}(y-y_k)$$

$$z[x_0,x_1;y] = \frac{z(x_0,y)-z(x_1,y)}{x_0-x_1}, \qquad z[x;y_0,y_1] = \frac{z(x,y_0)-z(x,y_1)}{y_0-y_1}$$



Интерполяция производных

- Дифференцирование интерполяционного многочлена
- Дифференцирование сплайна
- Метод неопределённых коэффициентов

Среднеквадратичное приближение

$y(x_i)$ определены неточно
$y(x)$, $\{\phi(x)\}$ — элементы линейного нормированного пространства функций

- Аппроксимация с заданной точностью: по заданному ε найти такую $\phi(x)$, чтобы выполнялось неравенство

$$\|y(x) - \phi(x)\| \leqslant \varepsilon$$

- Нахождение наилучшего приближения, то есть функции $\hat{\phi}(x)$, удовлетворяющей соотношению

$$\|y(x) - \hat{\phi}(x)\| = \inf \|y(x) - \phi(x)\| = \nu$$

Гильбертово пространство $\mathbf{L}_2(\rho)$ действительных функций, интегрируемых с квадратом с весом $\rho(x) > 0$ на $[a, b]$.

$$\|f\|_{\mathbf{L}_2} = \sqrt{\langle f, f \rangle}, \quad \langle f, \phi \rangle = \int_a^b \rho(x) f(x) \phi(x)\, dx$$

Аппроксимирующая функция:

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \phi_i(x),$$

где функции ϕ_i линейно независимы.

Условие наилучшего приближения:

$$\|y-\phi\|^2_{\mathbf{L}_2} = \langle y, y\rangle - 2\sum_{i=1}^{n} a_i \langle y, \phi_i\rangle + \sum_{i,j=1}^{n} a_i a_j \langle \phi_i, \phi_j\rangle \to \min$$

$$\sum_{j=1}^{n} \langle \phi_i, \phi_j\rangle a_j = \langle y, \phi_j\rangle, \quad i = 1, \dots, n$$

Определитель (Грама) отличен от нуля, так как ϕ_i линейно независимы.

Наилучшее среднеквадратическое приближение существует и единственно.

Если функции ϕ_i образуют полную ортонормированную систему, то в силу равенства Парсеваля

$$\|y - \phi\|_{\mathbf{L}_2}^2 = \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i^2$$

Ортогональные многочлены

$$\int_a^b P_n(x)P_m(x)\rho(x)\,dx = N_n\delta_{nm}, \quad \rho(x) > 0$$

$$a_nP_{n+1}(x) = (b_nx - c_n)P_n(x) - d_nP_{n-1}(x)$$

Лежандра $L_n(x)$ $a = -1$, $b = 1$, $\rho(x) = 1$ $N_n = \frac{2}{2n+1}$, $a_n = n + 1$, $b_n = 2n + 1$, $c_n = 0$, $d_n = n$, $L_0 = 1$, $L_1 = x$

Чебышева первого рода $T_n(x)$ $a = -1$, $b = 1$, $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $N_n = \frac{\pi}{2}$ при $n \neq 0$ и $N_0 = \pi$, $a_n = 1$, $b_n = 2$, $c_n = 0$, $d_n = 1$, $T_0 = 1$, $T_1 = x$

Чебышева второго рода $U_n(x)$ $a = -1$, $b = 1$, $\rho(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $N_n = \frac{\pi}{2}$, $a_n = 1$, $b_n = 2$, $c_n = 0$, $d_n = 1$, $U_0 = 1$, $U_1 = 2x$

При табличном задании функции

$$\langle f, \phi \rangle = \sum_{i=1}^{N} \rho_i f_i \phi_i, \quad \rho_i > 0$$

Условие наилучшего среднеквадратического приближения:

$$\sum_{i=1}^{N} \phi_i \big(y(x_i) - \phi(x_i) \big)^2 \to \min$$

Если

$$\phi(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \phi_k(x),$$

то

$$\sum_{j=1}^{n} \langle \phi_i, \phi_j \rangle a_j = \langle y, \phi_j \rangle, \quad i = 1, \ldots, n$$

Многочлены $P_n(x)$ называют ортонормированными по системе точек x_i с весами ρ_i $(i = 1, \dots, N)$, если они удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{i=1}^{N} \rho_i P_n(x_i) P_m(x_i) = \delta_{nm}.$$

$$\lambda_n P_{n+1}(x) = (x - a_n) P_n(x) + b_n P_{n-1}(x)$$

$$a_n = \sum_{i=1}^{N} \rho_i x_i P_n(x_i)^2, \quad b_n = \sum_{i=1}^{N} \rho_i x_i P_n(x_i) P_{n-1}(x_i)$$

λ_n определяется из условия нормировки

$$P_{-1}(x) \equiv 0, \quad P_0(x) = \left(\sum\nolimits_{i=1}^{N} \rho_i\right)^{-\frac{1}{2}}$$