Численные методы

Приближение функций. Интерполяция

Шишкин Владимир Андреевич

Постановка задачи

Исходные данные: значения функции $f(t)$ (и её производных $f^{(k)}(t)$) в точках $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$.

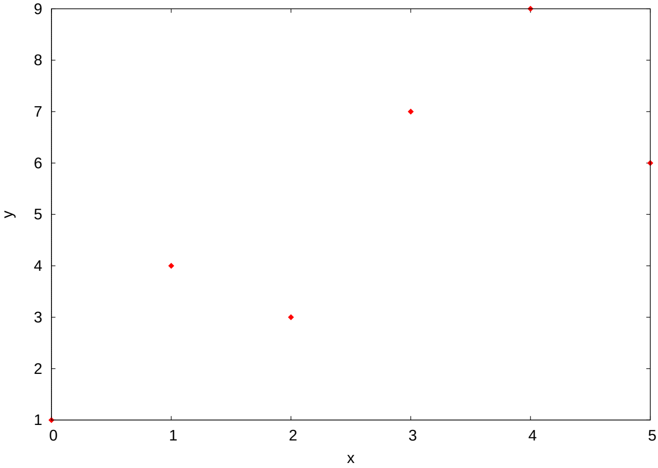
Требуется: подобрать функцию $\tilde{f}(t)$ *близкую* к $f(t)$.

«$\tilde{f}(t)$ близка к $f(t)$» на множестве $\{t_i\}_{i=0}^n$:

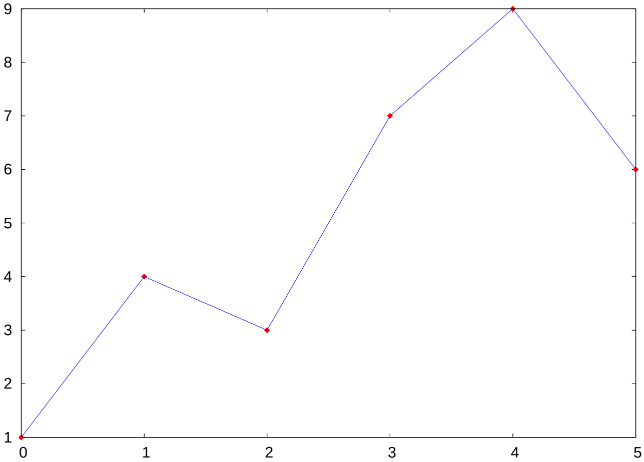
- интерполяция
  - $\tilde{f}(t_i) = f(t_i), \quad i = 0, 1, \ldots, n$
- аппроксимация
  - $\sum_{i=0}^n \left|\tilde{f}(t_i) - f(t_i)\right| \to \min$
  - $\sum_{i=0}^n \left(\tilde{f}(t_i) - f(t_i)\right)^2 \to \min$

  или, например,
  - $\max_i \left|\tilde{f}(t_i) - f(t_i)\right| \to \min$

x	0	1	2	3	4	5
y	1	4	3	7	9	6



x	0	1	2	3	4	5
y	1	4	3	7	9	6



```
x : [0,1,2,3,4,5]$
y : [1,4,3,7,9,6]$

xy : makelist([x[i],y[i]],i,length(x))$
plot2d([discrete,xy],
       [style,points],[point_type,diamond],[color,red],
       [psfile,"~/app-01.ps"])$

plot2d([[discrete,xy],[discrete,xy]],
[legend,"",""],
[style,points,lines],[point_type,diamond],[color,red,blue],
[psfile,"~/app-02.ps"])$
```

Интерполяционный многочлен
Метод неопределённых коэффициентов

$$\tilde{f}(t) = \sum_{j=0}^{n} a_j t^j$$

$$\tilde{f}(t) = \sum_{j=0}^{n} a_j t^j$$

$$\tilde{f}(t_i) \equiv \sum_{j=0}^{n} a_j t_i^j = f(t_i), \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

Интерполяционный многочлен

Метод неопределённых коэффициентов

$$\tilde{f}(t) = \sum_{j=0}^{n} a_j t^j$$

$$\begin{aligned}
a_0 + a_1 t_0 + a_2 t_0^2 + \dots + a_n t_0^n &= f(t_0) \\
a_0 + a_1 t_1 + a_2 t_1^2 + \dots + a_n t_1^n &= f(t_1) \\
&\dots \\
a_0 + a_1 t_n + a_2 t_n^2 + \dots + a_n t_n^n &= f(t_n)
\end{aligned}$$

$$\tilde{f}(t) = \sum_{j=0}^{n} a_j t^j$$

Определитель Вандермонда:

$$\begin{vmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 & \dots & t_0^n \\ 1 & t_1 & t_1^2 & \dots & t_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & t_n & t_n^2 & \dots & t_n^n \end{vmatrix} = \prod_{0 \leqslant j < i \leqslant n} (t_i - t_j)$$

Интерполяционный многочлен Лагранжа

$$L_n(t) = \sum_{i=0}^{n} f(t_i) l_i(t)$$

$$l_i(t_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases} \qquad 0 \leqslant i \leqslant n, \quad 0 \leqslant j \leqslant n$$

Интерполяционный многочлен Лагранжа

$$L_n(t) = \sum_{i=0}^{n} f(t_i) l_i(t)$$

$$l_i(t_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases} \qquad 0 \leqslant i \leqslant n, \quad 0 \leqslant j \leqslant n$$

$$l_i(t) \sim (t - t_0)(t - t_1) \ldots (t - t_{i-1})(t - t_{i+1}) \ldots (t - t_n)$$

Интерполяционный многочлен Лагранжа

$$L_n(t) = \sum_{i=0}^{n} f(t_i) l_i(t)$$

$$l_i(t_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases} \qquad 0 \leqslant i \leqslant n, \quad 0 \leqslant j \leqslant n$$

$$l_i(t) = \frac{(t-t_0)}{(t_i-t_0)} \frac{(t-t_1)}{(t_i-t_1)} \cdots \frac{(t-t_{i-1})}{(t_i-t_{i-1})} \frac{(t-t_{i+1})}{(t_i-t_{i+1})} \cdots \frac{(t-t_n)}{(t_i-t_n)}$$

Интерполяционный многочлен Лагранжа

$$L_n(t) = \sum_{i=0}^{n} f(t_i) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{t - t_j}{t_i - t_j}$$

Интерполяционный многочлен Лагранжа

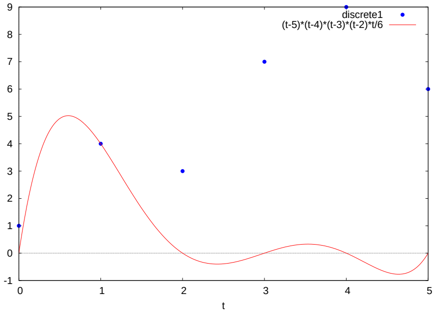
$$L_n(t) = \sum_{i=0}^{n} f(t_i) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{t - t_j}{t_i - t_j}$$

$$\omega_n(t) = \prod_{j=0}^{n} (t - t_j), \quad \omega_n'(t) = \sum_{i=0}^{n} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (t - t_j), \quad \omega_n'(t_i) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (t_i - t_j)$$

$$L_n(t) = \sum_{i=0}^{n} f(t_i) \frac{\omega_n(t)}{(t - t_i)\omega_n'(t_i)}$$

```
l(t,n) := block(p:1,
                for i thru length(x) do
                  if i#n then p : p * (t-x[i])/(x[n]-x[i]),
                p);

plot2d([[discrete,xy],y[2]*l(t,2)],[t,0,5],
       [style,points,line])$
```



$$\phi(t) = f(t) - L_n(t) - K\omega_n(t)$$

1. Пусть $\phi(x) = 0$, тогда $K = \frac{f(x)-L_n(x)}{\omega_n(x)}$.
2. $\Rightarrow \phi(t) = 0$ в $(n+2)$-х точках: $t_0, t_1, \ldots, t_n, x$.
3. $\Rightarrow \phi'(t) = 0$ по крайней мере в $(n+1)$-й точке (по теореме Ролля).
4. $\ldots$
5. $\Rightarrow \phi^{(n+1)}(t) = 0$ по крайней мере в одной точке

$$\zeta \in [t_{\min}, t_{\max}] \qquad t_{\min} = \min(t_1, x) \quad t_{\max} = \max(t_n, x)$$

$$\phi^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - K(n+1)! \quad \Rightarrow \quad K = f^{(n+1)}(\zeta)/(n+1)!$$

$$f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}\omega_n(x), \quad \zeta \in [t_{\min}, t_{\max}]$$

Интерполяционный многочлен Ньютона

$$p_n(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i \pi_i(t),$$

$$\pi_i(t) = \begin{cases} 1, & i = 0, \\ (t - t_0)(t - t_1)\dots(t - t_{i-1}), & 0 < i \leqslant n. \end{cases}$$

Интерполяционный многочлен Ньютона

$$p_n(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i \pi_i(t),$$

$$\pi_i(t) = \begin{cases} 1, & i = 0, \\ (t - t_0)(t - t_1) \ldots (t - t_{i-1}), & 0 < i \leqslant n. \end{cases}$$

$$p_n(t_i) = y(t_i), \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Интерполяционный многочлен Ньютона

$$p_n(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i \pi_i(t),$$

$$\pi_i(t) = \begin{cases} 1, & i = 0, \\ (t - t_0)(t - t_1)\dots(t - t_{i-1}), & 0 < i \leqslant n. \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} \pi_0(t_0) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \pi_0(t_1) & \pi_1(t_1) & 0 & \dots & 0 \\ \pi_0(t_2) & \pi_1(t_2) & \pi_2(t_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi_0(t_n) & \pi_1(t_n) & \pi_2(t_n) & \dots & \pi_n(t_n) \end{vmatrix} = \pi_0(t_0)\pi_1(t_1)\pi_2(t_2)\dots\pi_n(t_n)$$

Интерполяционный многочлен Ньютона

$$p_n(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i \pi_i(t),$$

$$\pi_i(t) = \begin{cases} 1, & i = 0, \\ (t - t_0)(t - t_1)\dots(t - t_{i-1}), & 0 < i \leqslant n. \end{cases}$$

$$a_j = f[t_0, t_1, \dots, t_j], \quad 0 \leqslant j \leqslant n$$

$$f[t_j] = f(t_j), \quad f[t_0, t_1, \dots, t_j] = \frac{f[t_1, \dots, t_j] - f[t_0, t_1, \dots, t_{j-1}]}{t_j - t_0}$$

Интерполяционный многочлен Ньютона

$$
\begin{array}{llllll}
t_0 & f[t_0] & & & \\
 & & f[t_0,t_1] & & \\
t_1 & f[t_1] & & f[t_0,t_1,t_2] & \\
 & & f[t_1,t_2] & & f[t_0,t_1,t_2,t_3] \\
t_2 & f[t_2] & & f[t_1,t_2,t_3] & \\
 & & f[t_2,t_3] & & \\
t_3 & f[t_3] & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
P_n(t) = f[t_0] + f[t_0,t_1](t-t_0) + f[t_0,t_1,t_2](t-t_0)(t-t_1)+ \\
+\dots + f[t_0,t_1,\dots,t_n](t-t_0)(t-t_1)\dots(t-t_{n-1})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_n(t) = f[t_n] + f[t_{n-1},t_n](t-t_n) + f[t_{n-2},t_{n-1},t_n](t-t_n)(t-t_{n-1})+ \\
+\dots + f[t_0,t_1,\dots,t_n](t-t_1)(t-t_2)\dots(t-t_n)
\end{aligned}
$$

Ортогональные многочлены Чебышева

$$T_0(t) = 1, \quad T_1(t) = t,$$
$$T_{n+1}(t) = 2tT_n(t) - T_{n-1}(t), \quad n > 0.$$

$$T_n(t) = 2^{n-1}t^n + \cdots, \quad n > 0$$

Ортогональные многочлены Чебышева

$$\cos\big((n+1)\theta\big) = 2\cos(\theta)\cos(n\theta) - \cos\big((n-1)\theta\big)$$

$\theta = \arccos(t)$

$$\cos\big((n+1)\arccos(t)\big) = 2t\cos\big(n\arccos(t)\big) - \cos\big((n-1)\arccos(t)\big),$$

При $n = 0$ и $n = 1$

$$\cos\big(0\cdot\arccos(t)\big) = 1 = T_0(t), \quad \cos\big(1\cdot\arccos(t)\big) = t = T_1(t)$$

$$T_n(t) = \cos\big(n\arccos(t)\big).$$

$$|T_n(t)| \leqslant 1 \text{ при } |t| \leqslant 1.$$

Нули T_n:

$$t_k = \cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{2n}\right), \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Точки экстремумов T_n $(T_n(t_{(k)}) = (-1)^k)$:

$$t_{(k)} = \cos\left(\frac{\pi k}{n}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Многочлены $\bar{T}_n(t) = 2^{1-n}T_n(t) = t^n + \ldots$ называют *многочленами, наименее уклоняющимися от нуля*.

Ортогональные многочлены Чебышева

$\tilde{t} = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t$: $[-1,1] \to [a,b]$.

$$\bar{T}_n^{[a,b]}(t) = (b-a)^n 2^{1-2n} T_n\left(\frac{2t-(b+a)}{b-a}\right) = t^{n-1} + \dots$$

является многочленом, наименее уклоняющимся от нуля на отрезке $[a,b]$

Многочлены

$$\tilde{T}_n(t) = \begin{cases} 1/\sqrt{2}, & n = 0, \\ T_n(t), & n \geqslant 1, \end{cases}$$

образуют на $[-1, 1]$ ортонормированную систему с весом $2/(\pi\sqrt{1-t^2})$:

$$\int_{-1}^{1} \frac{2}{\pi\sqrt{1-t^2}} \tilde{T}_{n_1}(t)\tilde{T}_{n_2}(t)\,dt = \begin{cases} 0, & n_1 \neq n_2, \\ 1, & n_1 = n_2. \end{cases}$$

Минимизация оценки остаточного члена интерполяционной формулы

Если в качестве узлов интерполяции взять

$$t_k = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}\cos\left(\frac{\pi(2k+1)}{2n+2}\right), \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

то $\omega(t) = \bar{T}_{n+1}^{[a,b]}(t)$ и $\|\omega\| = (b-a)^{n+1}2^{-1-2n}$.
Следовательно, наилучшая оценка имеет вид

$$\|y(t) - L_n(t)\| = \frac{\|y^{(n+1)}\|}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}2^{-1-2n}.$$

Интерполяционный многочлен Эрмита

Исходные данные:

$$
\begin{array}{ccccc}
t_0 & t_1 & t_2 & \dots & t_n \\
f(t_0) & f(t_1) & f(t_2) & \dots & f(t_n) \\
f'(t_0) & f'(t_1) & f'(t_2) & \dots & f'(t_n)
\end{array}
$$

$t_0 < t_1 < \dots < t_n$

$$p_{2n+1} = \sum_{i=0}^{n} \big(f(t_i) u_i(t) + f'(t_i) v_i(t) \big)$$

$$u_i(t) = \big(1 - 2l_i'(t_i)(t - t_i)\big) l_i(t)^2, \quad v_i(t) = (t - t_i) l_i(t)^2$$

$$f(x) - p_{2n+1}(x) = (x - t_0)^2 (x - t_1)^2 \dots (x - t_n)^2 \frac{f^{(2n+2)}(\zeta)}{(2n+2)!}$$

Сплайн–интерполяция

Сплайн порядка m

Функция

$$S_m(t) = P_{i,m}(t) = a_{i0} + a_{i1}t + \dots + a_{im}t^m, \qquad t_{i-1} \leqslant t \leqslant t_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

удовлетворяющая условиям непрерывности производных до порядка $m-1$ в точках t_i, $i = 1, \dots, n-1$:

$$P_{i,m}^{(k)}(t_i) = P_{i+1,m}^{(k)}(t_i), \qquad i = 1, \dots, n-1, \quad k = 0, 1, \dots, m-1.$$

$$P_i(t) = a_{i0} + a_{i1}(t - t_{i-1}), \quad i = 1, \ldots, n.$$

$$a_{i0} = y(t_{i-1}), \quad a_{i1} = \frac{y(t_i) - y(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

$$P_i(t) = a_{i0} + a_{i1}(t - t_{i-1}) + a_{i2}(t - t_{i-1})^2 + a_{i3}(t - t_{i-1})^3, \quad i = 1, \ldots, n.$$

$$P_i(t) = a_{i0} + a_{i1}(t - t_{i-1}) + a_{i2}(t - t_{i-1})^2 + a_{i3}(t - t_{i-1})^3, \quad i = 1, \ldots, n.$$

$4n$ неизвестных параметров

$$P_i(t) = a_{i0} + a_{i1}(t - t_{i-1}) + a_{i2}(t - t_{i-1})^2 + a_{i3}(t - t_{i-1})^3, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Условия непрерывности:

$$\begin{aligned} P_i(t_{i-1}) &= y(t_{i-1}), & i &= 1, \ldots, n, \\ P_i(t_i) &= y(t_i), & i &= 1, \ldots, n, \\ P_i'(t_i) &= P_{i+1}'(t_i), & i &= 1, \ldots, n-1, \\ P_i''(t_i) &= P_{i+1}''(t_i), & i &= 1, \ldots, n-1. \end{aligned}$$

$4n - 2$ условий

$$P_i(t) = a_{i0} + a_{i1}(t - t_{i-1}) + a_{i2}(t - t_{i-1})^2 + a_{i3}(t - t_{i-1})^3, \quad i = 1, \dots, n.$$

- $P_1''(t_0) = P_n''(t_n) = 0$ (естественные краевые условия);
- если известны значения $y'(t_0)$ и $y'(t_n)$, то $P_1'(t_0) = y'(t_0)$ и $P_1'(t_n) = y'(t_n)$;
- если значения $y'(t)$ в точках t_0 и t_1 неизвестны, то можно использовать приближённые значения:

$$P_1'(0) = \frac{y(t_1) - y(t_0)}{t_1 - t_0}, \quad P_1'(t_n) = \frac{y(t_n) - y(t_{n-1})}{t_n - t_{n-1}};$$

- $P_1'(t_0) = P_n'(t_n)$ и $P_1'(t_0) = P_n'(t_n)$ (периодические краевые условия).

Кусочно-кубический многочлен Эрмита

$$P_i(t) = a_{i0} + a_{i1}t + a_{i2}t^2 + a_{i3}t^3, \quad i = 1, \ldots, n$$

$$P_i(t) = a_{i0}(t - t_i) + a_{i1}(t - t_{i-1}) + a_{i2}(t - t_i)^2(t - t_{i-1}) + a_{i3}(t - t_{i-1})^2(t - t_i),$$

$$P_i(t_{i-1}) = y(t_{i-1}), \qquad P_i(t_i) = y(t_i),$$

$$P_i'(t_{i-1}) = y'(t_{i-1}), \qquad P_i'(t_i) = y'(t_i).$$

Если значения производных в узлах t_i, $i = 1, \ldots, n$, неизвестны, их можно заменить приближёнными значениями.

Дробно-полиномиальная интерполяция

$$\tilde{y}(t) = \frac{a_0 + a_1 t + \cdots + a_p t^p}{b_0 + b_1 t + \cdots + b_q t^q}$$

$$\sum_{i=0}^{p} a_i t_j^i - y(t_j) \sum_{i=0}^{q} b_i t_j^i = 0, \quad j = 1, \ldots, p+q+1$$

$b_0 = 1$