

Численные методы

Введение

1. Понятие численных методов
Этапы численного решения. Алгоритм
2. Ошибки
Источники ошибок. Абсолютные и относительные ошибки. Анализ ошибок численного решения

Приближение функций

1. Постановка задачи приближения функции. Меры близости
2. Интерполяция
 - 2.1. Понятие интерполяции
 - 2.2. Интерполяционный многочлен
Метод неопределённых коэффициентов, интерполяционные многочлены Лагранжа и Ньютона, оценка погрешности, ортогональные многочлены Чебышева, многочлен наилучшего приближения, интерполяционный многочлен Эрмита
 - 2.3. Кусочно-полиномиальная интерполяция
Интерполяционные сплайны, краевые условия для кубического сплайна, кусочно-кубический многочлен Эрмита
 - 2.4. Дробно-полиномиальная интерполяция
 - 2.5. Многомерная интерполяция
 - 2.6. Численное дифференцирование
Одно- и двухсторонние формулы, метод неопределённых коэффициентов
3. Аппроксимация
 - 3.1. Среднеквадратическое приближение
Линейная аппроксимация, ортогональные функции, метод наименьших квадратов
 - 3.2. Нейронные сети
Искусственный нейрон, многослойный перцептрон, понятие об обучении с обратным распространением ошибки, задачи регрессии и классификации, сети на основе радиальных базисных функций, моделирование временных рядов

Численное интегрирование

1. Простейшие формулы
Квадратурные формулы прямоугольников, трапеций, Симпсона; оценка погрешности
2. Формулы с равномерным расположением узлов
Формулы Ньютона-Котеса, правило Рунге оценки точности, уточнение решения по Рундсону
3. Формулы с неравномерным расположением узлов
Формула Чебышева; формула Гаусса; формула Гаусса-Кронрода, оценка погрешности
4. Интегралы с переменным верхним пределом
5. Многомерные интегралы
Перемножение одномерных квадратурных формул, оценка значения интеграла методом Монте-Карло

Задачи линейной алгебры

Векторные и матричные нормы. Трансформация Гаусса. Обусловленность матрицы.

1. Точные методы решения систем линейных алгебраических уравнений
Метод Гаусса, модификации методы Гаусса, метод Гаусса-Жордана, LU -разложение матрицы. Ортогональные преобразования матрицы, метод вращений, метод отражений, QR -разложение матрицы. Вычисление определителя матрицы. Вычисление обратной матрицы, использование разбиения матрицы на клетки, уточнение обратной матрицы. Метод квадратного корня, LL^T -разложение матрицы. Переопределённые системы уравнений, псевдообратная матрица Мура-Пенроуза. Сингулярное разложение матрицы.
2. Итерационные методы решения системы линейных алгебраических уравнений
Принципы построения итерационных процессов, классификация процессов. Метод последовательных приближений, метод Якоби, метод Зейделя. Методы полной и неполной релаксации. Релаксация по длине вектора невязки.
3. Проблема собственных значений
Полная проблема собственных значений, метод Крылова построения характеристического многочлена и определения собственных векторов. Частичная проблема собственных значений, оценка наибольшего по модулю собственного числа.

Решение нелинейных уравнений

1. Решение скалярных нелинейных уравнений
Локализация корня. Метод деления отрезка пополам. Методы, основанные на линейной интерполяции, — методы хорд и секущих. Метод Ньютона, области притяжения. Метод простых итераций. Комбинированные методы.
2. Решение систем нелинейных уравнений
Метод Ньютона для системы нелинейных уравнений, глобально сходящийся метод.
3. Локализация корней многочленов
Определение радиуса круга, содержащего все корни многочлена. Метод Штурма, последовательность Штурма.

Решение дифференциальных уравнений

1. Задача Коши
 - 1.1. Одношаговые методы
Использование численного интегрирования. Метод Эйлера. Оценка погрешности, порядок метода. Метод Хьюна. Методы Рунге-Кутты. Метод Рунге-Кутты-Фелберга.
 - 1.2. Многошаговые методы
Использование численного интегрирования. Методы Адамса-Башфорта. Методы Адамса-Моултона. Метод прогноза и коррекции.
 - 1.3. Дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументов
Сосредоточенное и распределённое запаздывание аргумента, методы решения.
2. Краевые задачи
 - 2.1. Двухточечная краевая задача
Метод конечных разностей. Метод пристрелки. Проекционные методы: метод коллокации, метод Галёркина.
 - 2.2. Задачи с функциональными условиями

Численная оптимизация

1. Одномерная оптимизация
 - 1.1. Методы исключения интервалов
Локализация минимума — метод Свенна. Метод трёх точек. Метод золотого сечения.

- 1.2. Методы, основанные на полиномиальной интерполяции.
- 1.3. Методы первого и второго порядка
Метод средней точки. Метод Ньютона-Рафсона
2. Многомерная оптимизация
 - 2.1. Методы нулевого порядка
Поиск по регулярному симплексу, модификация Нелдера-Мида. Метод Хука-Дживса.
Метод координатного спуска. Метод сопряжённых направлений Пауэлла.
 - 2.2. Методы с использованием производных
Метод наискорейшего спуска, метод Ньютона. Квазиньютоновские методы.
3. Условная оптимизация
Использование штрафных и барьерных функций. Методы, основанные на линеаризации.
Метод проекции градиента.
4. Методы из теории искусственного интеллекта
Метод имитации отжига. Генетические алгоритмы.

Некорректные задачи

1. Понятие о некорректных задачах
Корректность по Адамару, корректность по Тихонову
2. Решение некорректных задач
Метод подбора, квазирешение, метод Лаврентьева