Эконометрика

Модели векторной авторегрессии

Шишкин Владимир Андреевич

Пермский государственный национальный исследовательский университет

ARMA(p,q)

ARMA(p)

$$y_t = \alpha_1 y_{t-1} + \dots + \alpha_p y_{t-p} + \\ + \varepsilon_t + \beta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \beta_q \varepsilon_{t-q}, \quad t = 1, \dots, T$$

$$\phi_p(\mathsf{L}) = 1 - \alpha_1 \mathsf{L} - \dots - \alpha_p \mathsf{L}^p$$

$$\theta_q(\mathsf{L}) = 1 + \beta_1 \mathsf{L} + \dots + \beta_q \mathsf{L}^q$$

$$\phi_p(\mathsf{L}) y_t = \theta_q(\mathsf{L}) \varepsilon_t$$

ARMA(p, q)
Информационные критерии

AIC (Akaike)

$$\mathrm{AIC}(p, q) = \ln(s^2) + \frac{2}{T}(p + q)$$

BIC (Schwarz)

$$\mathrm{BIC}(p, q) = \ln(s^2) + \frac{\ln T}{T}(p + q)$$

HQ (Hannan и Quinn)

$$\mathrm{HC}(p, q) = \ln(s^2) + \frac{\ln(\ln T)}{T}(p + q)$$

s^2 — дисперсия остатков

VAR(p)

Векторная авторегрессионная модель: VAR(p)

$$y_t = A_1 y_{t-1} + \dots + A_p y_{t-p} + CD_t + u_t, \qquad y_t \in \mathbb{R}^K$$

$$A_i \in \mathbb{R}^{K\times K}, \quad C \in \mathbb{R}^{K\times M}, \quad D_t \in \mathbb{R}^M, \quad u_t \sim iid(0, \Sigma_u)$$

$$A(\mathsf{L}) = I_K - A_1\mathsf{L} - \dots - A_p\mathsf{L}^p$$

$$A(\mathsf{L})y_t = CD_t + u_t$$

p — порядок модели (наибольший лаг)
p^* — общее число параметров

VAR(p)
Стационарность

$$y_t = A_1 y_{t-1} + \dots + A_p y_{t-p} + u_t, \qquad y_t \in \mathbb{R}^K$$

Условие стационарности

$$\det(I_K - A_1 z - \dots - A_p z^p) \neq 0, \quad |z| \leqslant 1$$

VAR(p)

Стационарность

$$\xi_t = A\xi_{t-1} + v_t$$

$$\xi_t = \begin{pmatrix} y_t \\ \vdots \\ y_{t-p+1} \end{pmatrix}, \; A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_{p-1} & A_p \\ I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I & 0 \end{pmatrix}, \; v_t = \begin{pmatrix} u_t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Если все собственные числа матрицы A по абсолютной величине меньше единицы, то VAR(p)-процесс является стационарным.

VAR(p)

Информационные критерии

AIC (Akaike)

$$\mathrm{AIC}(p) = \log\det\left(\tilde{\Sigma}_u(p)\right) + \frac{2}{T} pK^2$$

HQ (Hannan и Quinn)

$$\mathrm{HQ}(p) = \log\det\left(\tilde{\Sigma}_u(p)\right) + \frac{2\log(\log T)}{T} pK^2$$

SC (Schwarz)

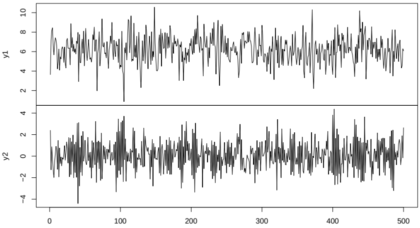
$$\mathrm{SC}(p) = \log\det\left(\tilde{\Sigma}_u(p)\right) + \frac{\log T}{T} pK^2$$

FPE (final prediction error)

$$\mathrm{FPE}(p) = \left(\frac{T + p^*}{T - p^*}\right)^K + \det\left(\tilde{\Sigma}_u(p)\right)$$

VAR(p)
Пример

$$
\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} 5.0 \\ 10.0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.5 & 0.2 \\ -0.2 & -0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}_{t-1} + \\ + \begin{pmatrix} -0.3 & -0.7 \\ -0.1 & 0.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}_{t-2} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}_t
$$



VAR(p)

Пример. Продолжение

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} 5.0 \\ 10.0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.5 & 0.2 \\ -0.2 & -0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}_{t-1} + \\ + \begin{pmatrix} -0.3 & -0.7 \\ -0.1 & 0.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}_{t-2} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}_t$$

```
$selection
AIC(n)  HQ(n)  SC(n) FPE(n)
     2      2      2      2
$criteria
                 1          2          3
AIC(n) 0.5309929 0.05132476 0.05860106
HQ(n)  0.5509349 0.08456154 0.10513255
SC(n)  0.5818008 0.13600464 0.17715289
FPE(n) 1.7006204 1.05266613 1.06035609
```

VAR(p)

Пример. Продолжение

```
VAR Estimation Results:
=========================
Endogenous variables: y1, y2
Deterministic variables: const
Sample size: 498
Log Likelihood: -1418.608
Roots of the characteristic polynomial:
0.8485 0.6116 0.5549 0.5549
Call:
VAR(y = vardat, p = 2, type = "const", exogen = NULL)
```

VAR(p)
Пример. Продолжение

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} 5.0 \\ 10.0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.5 & 0.2 \\ -0.2 & -0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}_{t-1} + \\ + \begin{pmatrix} -0.3 & -0.7 \\ -0.1 & 0.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}_{t-2} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}_t$$

```
y1 = y1.l1 + y2.l1 + y1.l2 + y2.l2 + const
    y1.l1      y2.l1      y1.l2      y2.l2      const
 0.4760616  0.2140923 -0.2803297 -0.6399330  5.0325836

y2 = y1.l1 + y2.l1 + y1.l2 + y2.l2 + const
      y1.l1       y2.l1       y1.l2       y2.l2       const
-0.19948693 -0.47148040 -0.08901817  0.36679523  1.87962024
```

VAR(p)

Пример. Продолжение

```
Estimation results for equation y1:
===================================
y1 = y1.l1 + y2.l1 + y1.l2 + y2.l2 + const
      Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
y1.l1  0.47606    0.03896  12.219  < 2e-16 ***
y2.l1  0.21409    0.04387   4.880 1.44e-06 ***
y1.l2 -0.28033    0.03757  -7.462 3.89e-13 ***
y2.l2 -0.63993    0.05011 -12.771  < 2e-16 ***
const  5.03258    0.29026  17.338  < 2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 1.045 on 493 degrees of freedom
Multiple R-Squared: 0.4496,     Adjusted R-squared: 0.4451
F-statistic: 100.7 on 4 and 493 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

Тестирование модели

Анализ причинности

Переменная x является *гранжер-причиной* переменной y, если x помогает предсказать значение переменной y.

$$\begin{pmatrix} y_{1,t} \\ y_{2,t} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{b} \begin{pmatrix} \alpha_{11,i} & \alpha_{12,i} \\ \alpha_{21,i} & \alpha_{22,i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1,t-i} \\ y_{2,t-i} \end{pmatrix} + CD_t + \begin{pmatrix} u_{1,t} \\ u_{2,t} \end{pmatrix}$$

$y_{1,t} \in \mathbb{R}^{K_1}$, $y_{2,t} \in \mathbb{R}^{K_2}$, $K = K_1 + K_2$

Тест Гранжера: проверяется гипотеза $\mathrm{H}_0\colon \alpha_{21,i} = 0$, $i = 1, \ldots, p$ (вектор $y_{1,t}$ — не гранжер-причина $y_{2,t}$)

Тест Уайлда: проверяется гипотеза об отсутствии связи между ошибками процесса и зависимыми переменными.

VAR(p)
Пример. Продолжение

```
$Granger

        Granger causality H0: y2 do not Granger-cause y1

data:  VAR object varsimest
F-Test = 197.9621, df1 = 2, df2 = 986, p-value < 2.2e-16


$Instant

        H0: No instantaneous causality between: y2 and y1

data:  VAR object varsimest
Chi-squared = 4.8916, df = 1, p-value = 0.02699
```

Прогнозирование

Точечная оценка

$$y_{T+h|T} = A_1 y_{T+h-1|T} + \cdots + A_p y_{T+h-p|T} + CD_{T+h}$$
$$h = 1, \ldots, n$$

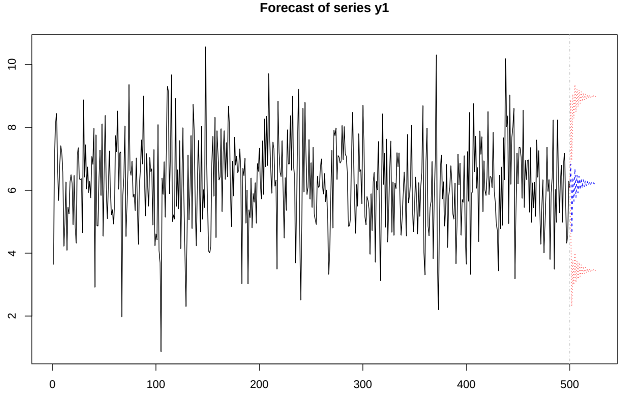
Интервальная оценка

$$[y_{k,T+h|T} + c_{\alpha/2} s_k(h), y_{k,T+h|T} + c_{1-\alpha/2} s_k(h)]$$

c_α — α-квантиль стандартного нормального распределения
$s_k(h)$ — стандартное отклонение k-й переменной через h шагов

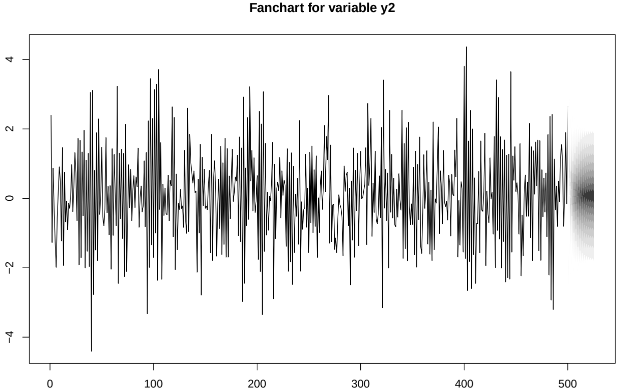
VAR(p)

Пример. Продолжение



VAR(p)

Пример. Продолжение



VAR

ARMA
VAR
SVAR
Нестационарные ряды

SVAR(p)

Структурная векторная авторегрессионная модель: SVAR(p)

$$Ay_t = A_1^* y_{t-1} + \cdots + A_p^* y_{t-p} + B\varepsilon_t, \qquad y_t \in \mathbb{R}^K$$

$\varepsilon_t \sim iid(0, \sigma^2)$ и $A \neq I$

$$y_t = A^{-1}A_1^* y_{t-1} + \cdots + A^{-1}A_p^* y_{t-p} + A^{-1}B\varepsilon_t$$
$$y_t = A_1 y_{t-1} + \cdots + A_p y_{t-p} + u_t$$

A–модель: $B = I_K$ ($K(K-1)/2$ дополнительных ограничений для идентифицируемости)

B–модель: $A = I_k$ ($K(K-1)/2$ дополнительных ограничений)

AB–модель: $K^2 + K(K-1)/2$ дополнительных ограничений

SVAR(p)
Оценивание

Логарифмическая функция правдоподобия:

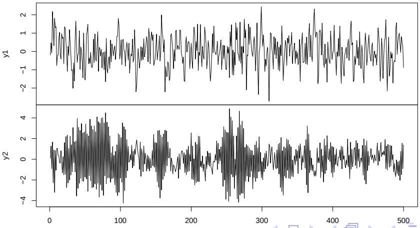
$$\ln L_c(A, B) = \text{const} + \frac{T}{2}\ln|A^2| - \frac{T}{2}\ln|B^2| - \\ - \frac{T}{2}\mathrm{tr}(A^\top B^{\top -1} B^{-1} A \hat{\Sigma}_u)$$

$\hat{\Sigma}_u$ — оценка ковариационной матрицы для остатков

SVAR(p): A-модель

Пример

$$\begin{pmatrix} 1 & -0.7 \\ 0.8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}_t =$$
$$= \begin{pmatrix} 5.0 \\ 10.0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.5 & 0.2 \\ -0.2 & -0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}_{t-1} +$$
$$+ \begin{pmatrix} -0.3 & -0.7 \\ -0.1 & 0.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}_{t-2} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}_t$$



SVAR(p): A-модель
Пример. Продолжение

```
VAR Estimation Results:
=======================

Estimated coefficients for equation y1:
=======================================
y1 = y1.l1 + y2.l1 + y1.l2 + y2.l2
     y1.l1      y2.l1      y1.l2      y2.l2
 0.2765801 -0.1048769 -0.2243208 -0.2892828

Estimated coefficients for equation y2:
=======================================
y2 = y1.l1 + y2.l1 + y1.l2 + y2.l2
      y1.l1       y2.l1       y1.l2       y2.l2
-0.27328587 -0.35663816  0.07807695  0.60733149
```

SVAR(p)

Пример. Продолжение

$$
\begin{pmatrix} 1 & -0.7 \\ 0.8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}_t =
$$

$$
= \begin{pmatrix} 5.0 \\ 10.0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.5 & 0.2 \\ -0.2 & -0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}_{t-1} +
$$

$$
+ \begin{pmatrix} -0.3 & -0.7 \\ -0.1 & 0.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}_{t-2} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}_t
$$

```
SVAR Estimation Results:
========================

Estimated A matrix:   Estimated standard errors for A matrix:
       y1      y2                y1      y2
y1 1.0000 -0.6975     y1 0.00000 0.05102
y2 0.8571  1.0000     y2 0.05728 0.00000
```

Нестационарные временные ряды

$$y_t = TD_t + z_t, \qquad \phi(\mathsf{L})z_t = \theta(\mathsf{L})\varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim iid(0, \sigma^2)$$

$TD_t = \beta_1 + \beta_2 t$ — детерминированный тренд

- Тренд-стационарная модель:

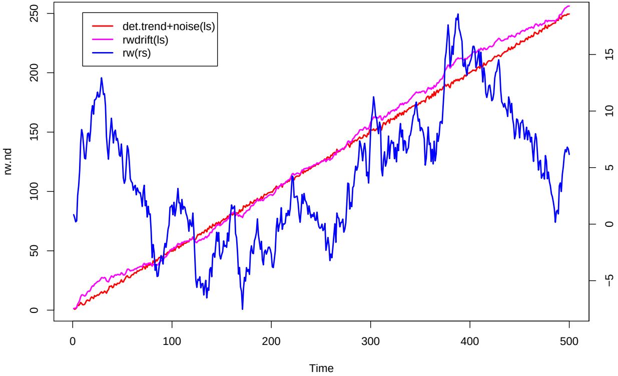
$$y_t = y_{t-1} + \mu = y_0 + \mu t.$$

- Разностно-стационарная модель:

$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t = y_0 + \sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i.$$

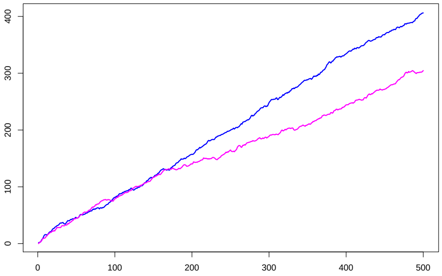
Нестационарные временные ряды

Пример



Коинтеграция

Ложная регрессия



$$R^2 = 0.9866 \quad DW = 0.01715$$

Коинтеграция

Коинтеграция

$x_t \sim CI(d,b)$:

1. все компоненты $x_t \sim \mathrm{I}(d)$;
2. существует ненулевой вектор α такой, что $z_t = \alpha x_t \sim \mathrm{I}(d-b)$.

Коинтеграция

Двухшаговая техника оценки модели с коинтегрированными переменными x и y:

1. оценка регрессии

$$y_t = \alpha_1 x_{t,1} + \cdots + \alpha_K x_{t,K} + z_t, \quad t = 1, \ldots, T$$

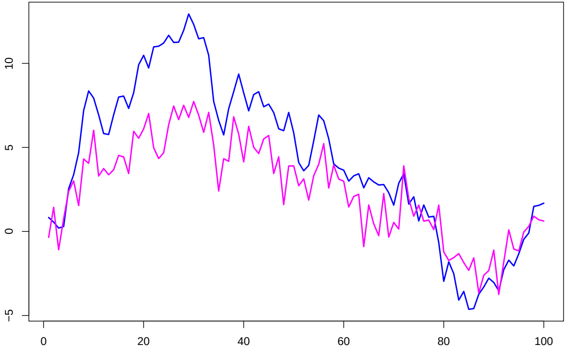
2. оценка модели коррекции ошибок:

$$\nabla y_t = \psi_0 + \gamma_1 \hat{z}_t + \sum_{i=1}^{K} \psi_{1,i} \nabla x_{t-i} + \sum_{i=1}^{L} \psi_{2,i} \nabla y_{t-i} + \varepsilon_{1,t}$$

$$\nabla x_t = \xi_0 + \gamma_2 \hat{z}_t + \sum_{i=1}^{K} \xi_{1,i} \nabla x_{t-i} + \sum_{i=1}^{L} \xi_{2,i} \nabla y_{t-i} + \varepsilon_{2,t}$$

Коинтеграция

Пример



Коинтеграция

Пример. Продолжение

```
Coefficients:
               Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)    0.003398   0.103611   0.033    0.974
error.lagged -0.968796   0.158554  -6.110 2.24e-08 ***
dy1.1          0.808633   0.112042   7.217 1.35e-10 ***
dy2.1         -1.058913   0.108375  -9.771 5.64e-16 ***
```