Эконометрика

Шишкин Владимир Андреевич

Пермский государственный национальный исследовательский университет

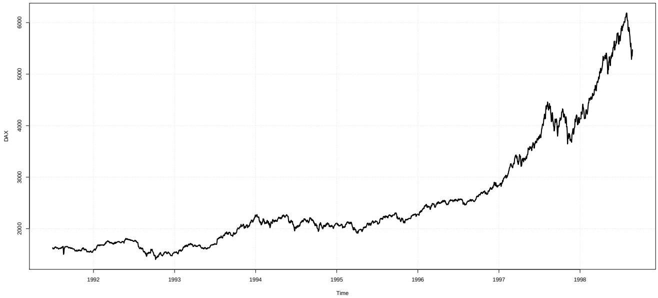
Волатильность

Волатильность — условная вариация дохода базового актива (тенденция изменчивости цены).

Примеры использования:

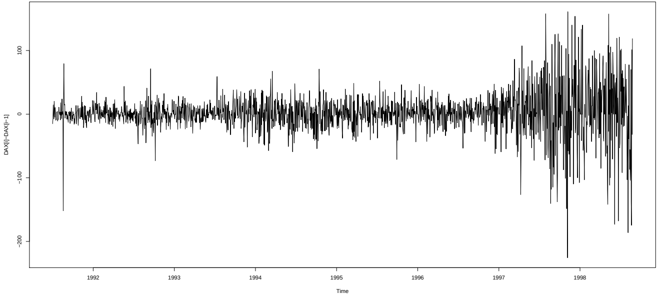
- модель Блека–Шоулза цены европейского опциона «колл»;
- риск–менеджмент (оценка VaR);
- повышение эффективности оценки параметров моделей временных рядов и точности интервальных прогнозов.

DAX 1993–1998 гг.



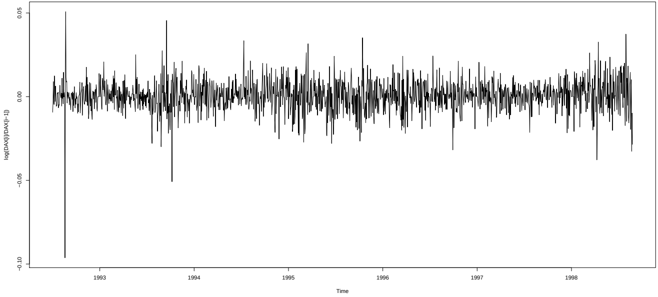
DAX 1993–1998 гг.

$$\mathrm{DAX}_t - \mathrm{DAX}_{t-1}$$



DAX 1993–1998 гг.

$$\ln \mathrm{DAX}_t - \ln \mathrm{DAX}_{t-1}$$



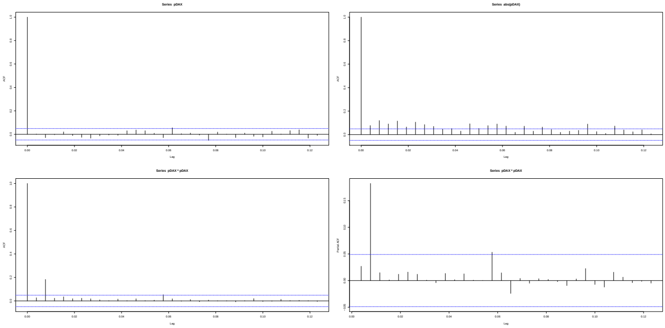
Характеристики волатильности

Волатильность не наблюдается явно.

1. Существуют кластеры волатильности.
2. Волатильность во времени проявляет непрерывное поведение.
3. Волатильность не расходиться к бесконечности.
4. Различная реакция на большой рост и большое падение цены актива.

DAX 1993–1998 гг.

$$r_t = \ln\left(\frac{\mathrm{DAX}_t}{\mathrm{DAX}_{t-1}}\right)$$



Модель доходности

Условное математическое ожидание

$$\mu_t = \mathsf{E}\left(r_t \mid F_{t-1}\right)$$

Условная дисперсия

$$\sigma_t^2 = \mathsf{D}\left(r_t \mid F_{t-1}\right) = \mathsf{E}\left((r_t - \mu_t)^2 \mid F_{t-1}\right)$$

F_{t-1} — информация, доступная в момент $t-1$.

Модель доходности

$$r_t = \mu_t + \varepsilon_t$$

ARMA(p, q)

$$\mu_t = \phi_0 + \sum_{i=1}^{p} \phi_i r_{t-i} - \sum_{i=1}^{q} \theta_i \varepsilon_{t-i}$$

$$\sigma_t^2 = \mathsf{D}\left(r_t \mid F_{t-1}\right) = \mathsf{D}\left(\varepsilon_t \mid F_{t-1}\right)$$

Модели условной гетероскедастичности описывают изменение σ_t^2.

ARCH

Модель с авторегрессионной условной гетероскедастичностью

Предположения модели:

1. ε_t не коррелированы, но обусловлены;
2. обусловленность ε_t может быть описана простой квадратичной функцией от её лаггированных значений.

ARCH(m)

$$\varepsilon_t = \sigma_t \nu_t, \quad \nu_t \sim iid(0,1)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_m \varepsilon_{t-m}^2$$

ARCH

Свойства модели

ARCH(1)

$$\varepsilon_t = \sigma_t \nu_t, \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2, \qquad \alpha_1 > 0, \ \alpha_2 \geqslant 0$$

Безусловное математическое ожидание:

$$\mathsf{E}\left(\varepsilon_t\right) = \mathsf{E}\left(\mathsf{E}\left(\varepsilon_t \mid F_{t-1}\right)\right) = \mathsf{E}\left(\sigma_t \mathsf{E}\left(\nu_t\right)\right) = 0$$

ARCH

Свойства модели

ARCH(1)

$$\varepsilon_t = \sigma_t \nu_t, \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2, \qquad \alpha_1 > 0,\ \alpha_2 \geqslant 0$$

Безусловная дисперсия:

$$\mathsf{D}\left(\varepsilon_t\right) = \mathsf{E}\left(\varepsilon_t^2\right) = \mathsf{E}\left(\mathsf{E}\left(\varepsilon_t^2 \mid F_{t-1}\right)\right) = \mathsf{E}\left(\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2\right) = \\ = \alpha_0 + \alpha_1 \mathsf{D}\left(\varepsilon_{t-1}\right)$$

Так как процесс стационарный, то $\mathsf{D}\left(\varepsilon_t\right) = \mathsf{D}\left(\varepsilon_{t-1}\right)$ и

$$\mathsf{D}\left(\varepsilon_t\right) = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1} \quad \Rightarrow \quad 0 \leqslant \alpha_1 < 1.$$

ARCH

Свойства модели

ARCH(1)

$$\varepsilon_t = \sigma_t \nu_t, \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2, \qquad \alpha_1 > 0,\ \alpha_2 \geqslant 0$$

Если $\nu_t \sim \mathcal{N}(0,1)$, то

1. $$\mathsf{E}\left(\varepsilon_t^4\right) = \frac{3\alpha_0^2(1+\alpha_1)}{(1-\alpha_1)(1-3\alpha_1^2)} \quad \Rightarrow \quad 0 \leqslant \alpha_1^2 < \frac{1}{3};$$

2. эксцесс
$$\frac{\mathsf{E}\left(\varepsilon_t^4\right)}{\mathsf{D}\left(\varepsilon_t\right)^2} = 3 + \frac{6\alpha_1^2}{1-3\alpha_1^2} > 3,$$
следовательно хвосты распределения ε_t более тяжёлые, чем у нормального распределения.

ARCH

Недостатки модели

1. Предполагается, что положительные и отрицательные изменения имеют один и тот же эффект.
2. Сильные ограничения, которые к тому же имеют сложный вид для моделей высоких порядков.
3. ARCH модель не даёт новой информации об источнике изменений финансовых временных рядов.
4. Модель завышает прогнозируемую волатильность.

ARCH

Построение модели

1. Создаётся эконометрическая модель (например, ARIMA) для исследуемых доходностей, остатки которой тестируются на условную гетероскедастичность.
2. Определяется порядок модели и оцениваются коэффициенты.
3. Оценивается точность ARCH модели.

GARCH

Модель с обобщённой авторегрессионной условной гетероскедастичностью

GARCH(m, s)

$$\varepsilon_t = \sigma_t \nu_t,$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{s} \beta_j \sigma_{t-j}^2, \quad \nu_t \sim iid(0, 1)$$

GARCH
Свойства

GARCH(1,1)

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$$
$$0 \leqslant \alpha_1, \beta_1 \leqslant 1, \quad (\alpha_1 + \beta_1) < 1$$

Большие значения ε_{t-1}^2 и σ_{t-1}^2 влекут большие значения σ_t^2

GARCH

Свойства

GARCH(1,1)

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$$

$$0 \leqslant \alpha_1, \beta_1 \leqslant 1, \quad (\alpha_1 + \beta_1) < 1$$

Если

$$1 - 2\alpha_1^2 - (\alpha_1 + \beta_1)^2 > 0,$$

то

$$\frac{\mathsf{E}\left(\varepsilon_t^4\right)}{\mathsf{D}\left(\varepsilon_t\right)^2} = 3 + \frac{6\alpha_1^2}{1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2 - 2\alpha_1^2} > 3$$

GARCH

Пусть $\eta_t = \varepsilon_t^2 - \sigma_t^2$, тогда

$$\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{\max(m,s)} (\alpha_i + \beta_i)\varepsilon_{t-i}^2 + \eta_t - \sum_{j=1}^{s} \beta_j \eta_{t-j}$$

$$\mathsf{E}\left(\eta_t\right) = 0, \qquad \operatorname{cov}\left(\eta_t, \eta_{t-j}\right) = 0, \quad j \geqslant 1, \qquad \eta_t \not\sim iid$$

Модель в форме ARMA для ε_t^2

IGARCH

Оценка $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i + \sum_{i=1}^{s} \beta_i$ близка к единице

Интегрированная модель GARCH

Пример: IGARCH$(1,1)$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + (1-\alpha_1)\sigma_{t-1}^2$$

GARCH-M

Модель GARCH *в среднем* (in mean)

GARCH(1,1)-M

$$r_t = \mu + c\sigma_t^2 + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t = \sigma_t \nu_t,$$
$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$$

c — плата за риск

$$r_t = \mu + c\sigma_t + \varepsilon_t$$

EGARCH

Экспоненциальная GARCH

$$g(\nu_t) = \begin{cases} (\theta+\gamma)\nu_t - \gamma \mathsf{E}\left(|\nu_t|\right), & \nu_t \geqslant 0, \\ (\theta-\gamma)\nu_t - \gamma \mathsf{E}\left(|\nu_t|\right), & \nu_t < 0. \end{cases}$$

EGARCH(m, s)

$$\varepsilon_t = \sigma_t \nu_t, \quad \ln(\sigma_t^2) = \alpha_0 + \frac{1+\beta_1 \mathsf{L} + \ldots \beta_s \mathsf{L}^s}{1-\alpha_1 \mathsf{L} - \cdots - \alpha_m \mathsf{L}^m} g(\nu_{t-1})$$

EGARCH

Свойства модели

1. Модель использует лаггированные условные дисперсии для ослабления ограничений положительности коэффициентов.
2. Использование $q(\nu_t)$ позволяет неодинаково реагировать на положительные и отрицательные лаггированные значения ε_t.

CHARMA

ARMA с условной гетероскедастичностью

$$r_t = \mu_t + \varepsilon_t,$$
$$\varepsilon_t = \delta_{1t}\varepsilon_{t-1} + \delta_{2t}\varepsilon_{t-2} + \cdots + \delta_{mt}\varepsilon_{t-m} + \eta_t, \quad \eta_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\eta^2)$$

$\{\delta_t\} = \{(\delta_{1t}, \ldots, \delta_{mt})^\top\}$ — последовательность iid случайных векторов с нулевым средним и неотрицательно определённой ковариационной матрицей Ω.
δ_t и η_t независимы

$$\sigma_t^2 = \sigma_\eta^2 + (\varepsilon_{t-1}, \ldots, \varepsilon_{t-m})\Omega(\varepsilon_{t-1}, \ldots, \varepsilon_{t-m})^\top$$

RCA

Авторегрессионная модель со случайными коэффициентами

RCA(p)

$$r_t = \phi_0 + \sum_{i=1}^{p} (\phi_i + \delta_{it}) r_{t-1} + \varepsilon_t$$

$p > 0$; $\sigma_t \sim iid(0, \Omega_\sigma)$; δ_t и ε_t независимы

$$\mu_t = \sum_{i=1}^{p} \phi_i \varepsilon_{t-i}$$

$$\sigma_t^2 = \sigma_\varepsilon^2 + (r_{t-1}, \ldots, r_{t-p}) \Omega (r_{t-1}, \ldots, r_{t-p})^\top$$

SV

Модель стохастической волатильности

$$\varepsilon_t = \sigma_t \nu_t, \quad (1 - \alpha_1 \mathsf{L} - \cdots - \alpha_m \mathsf{L}^m)\ln(\sigma_t^2) = \alpha_0 + \eta_t$$

- $\nu_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$
- $\eta_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\eta^2)$
- ν_t и η_t независимы
- α_0 — константа
- все корни многочлена $1 - \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathsf{L}^i$ по модулю больше единицы