Эконометрика

Динамические модели

Шишкин Владимир Андреевич

Пермский государственный национальный исследовательский университет

Модели с лагированными переменными

Лагированнные переменные — переменные, взятые в предыдущие моменты времени.

Модели с лагированными переменными

Лагированнные переменные — переменные, взятые в предыдущие моменты времени.

$$Y_t = \alpha + \beta_0 I_t + \beta_1 I_{t-1} + \cdots + \beta_p I_{t-p} + \varepsilon_t$$

Модели с лагированными переменными

Лагированнные переменные — переменные, взятые в предыдущие моменты времени.

1. Модели распределённых лагов (DL)

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + \beta_3 x_{t-1} + \varepsilon_t$$

2. Авторегрессионные модели распределённых лагов (ADL)

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + \beta_3 y_{t-1} + \varepsilon_t$$

Модели распределённых лагов

Оператор сдвига

Оператор сдвига

$$\mathsf{L}x_t = x_{t-1}$$

Модели распределённых лагов

Оператор сдвига

Оператор сдвига

$$\mathsf{L}x_t = x_{t-1}$$

ADL(p, q):

$$y_1 - \alpha_1 y_{t-1} + \dots + \alpha_p y_{t-p} =$$
$$= \delta + \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \dots + \beta_q x_{t-q} + \varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, n$$

Модели распределённых лагов

Оператор сдвига

Оператор сдвига

$$\mathsf{L}x_t = x_{t-1}$$

ADL(p,q):

$$y_1 - \alpha_1 y_{t-1} + \dots + \alpha_p y_{t-p} =$$
$$= \delta + \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \dots + \beta_q x_{t-q} + \varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, n$$

$$A(\mathsf{L})y_t = \delta + B(\mathsf{L})x_t + \varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, n$$

Модели распределённых лагов

Оператор сдвига

Оператор сдвига

$$\mathsf{L}x_t = x_{t-1}$$

ADL(p, q):

$$y_1 - \alpha_1 y_{t-1} + \dots + \alpha_p y_{t-p} =$$
$$= \delta + \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \dots + \beta_q x_{t-q} + \varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, n$$

$$A(\mathsf{L}) y_t = \delta + B(\mathsf{L}) x_t + \varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, n$$

$$A(\mathsf{L}) = 1 - \alpha_1 \mathsf{L} - \dots - \alpha_p \mathsf{L}^p$$
$$B(\mathsf{L}) = \beta_0 + \beta_1 \mathsf{L} + \dots + \beta_q \mathsf{L}^q$$

Модели распределённых лагов

Модель распределённых лагов

$$y_t = \delta + \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \cdots + \beta_q x_{t-q} + \varepsilon_t, \quad t = 1, \ldots, n$$

Модели распределённых лагов

Модель распределённых лагов

$$y_t = \delta + \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \cdots + \beta_q x_{t-q} + \varepsilon_t, \quad t = 1, \ldots, n$$

Суммарное влияние:

$$\beta = \beta_0 + \beta_1 + \cdots + \beta_q$$

Модели распределённых лагов

Модель распределённых лагов

$$y_t = \delta + \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \cdots + \beta_q x_{t-q} + \varepsilon_t, \quad t = 1, \ldots, n$$

Суммарное влияние:

$$\beta = \beta_0 + \beta_1 + \cdots + \beta_q$$

Вклад лага s:

$$w_s = \frac{\beta_s}{\beta}, \quad \sum_{i=0}^{q} w_s = 1$$

Модели распределённых лагов

Модель распределённых лагов

$$y_t = \delta + \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \cdots + \beta_q x_{t-q} + \varepsilon_t, \quad t = 1, \ldots, n$$

Суммарное влияние:

$$\beta = \beta_0 + \beta_1 + \cdots + \beta_q$$

Вклад лага s:

$$w_s = \frac{\beta_s}{\beta}, \quad \sum_{i=0}^{q} w_s = 1$$

w_s — функция распределения лагов

Модели распределённых лагов

Модель полиномиальных лагов (модель Алмон)

Модель распределённых лагов:

$$y_t = \delta + \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \cdots + \beta_q x_{t-q} + \varepsilon_t, \quad t = 1, \ldots, n$$

Модели распределённых лагов

Модель полиномиальных лагов (модель Алмон)

Модель распределённых лагов:

$$y_t = \delta + \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \dots + \beta_q x_{t-q} + \varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, n$$

$$\beta_i = \gamma_0 + \gamma_1 i + \dots + \gamma_r i^r, \quad r < q$$

Модели распределённых лагов

Модель полиномиальных лагов (модель Алмон)

Модель распределённых лагов:

$$y_t = \delta + \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \cdots + \beta_q x_{t-q} + \varepsilon_t, \quad t = 1, \ldots, n$$

$$\beta_i = \gamma_0 + \gamma_1 i + \cdots + \gamma_r i^r, \quad r < q$$

Модель полиномиальных лагов:

$$y_t = \delta + \gamma_0 \tilde{x}_{0t} + \cdots + \gamma_r \tilde{x}_{rt} + \varepsilon_t, \quad t = 1, \ldots, n$$

Модели распределённых лагов

Модель полиномиальных лагов (модель Алмон)

Модель распределённых лагов:

$$y_t = \delta + \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \cdots + \beta_q x_{t-q} + \varepsilon_t, \quad t = 1, \ldots, n$$

$$\beta_i = \gamma_0 + \gamma_1 i + \cdots + \gamma_r i^r, \quad r < q$$

Модель полиномиальных лагов:

$$y_t = \delta + \gamma_0 \tilde{x}_{0t} + \cdots + \gamma_r \tilde{x}_{rt} + \varepsilon_t, \quad t = 1, \ldots, n$$

$$F = \frac{(\mathrm{ESS}_R - \mathrm{ESS}_{UR})/(q-r)}{\mathrm{ESS}_{UR}/(n-q-2)}$$

Модели распределённых лагов

Модель геометрических лагов (модель Койка)

Модель распределённых лагов:

$$y_t = \delta + \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \cdots + \beta_q x_{t-q} + \varepsilon_t, \quad t = 1, \ldots, n$$

Модели распределённых лагов

Модель геометрических лагов (модель Койка)

Модель распределённых лагов:

$$y_t = \delta + \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \cdots + \beta_q x_{t-q} + \varepsilon_t, \quad t = 1, \ldots, n$$

Влияние переменной x продолжается бесконечно, убывая на одну и ту же величину λ $(0 < \lambda < 1)$ с каждым шагом по времени.

Модели распределённых лагов

Модель геометрических лагов (модель Койка)

Модель распределённых лагов:

$$y_t = \delta + \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \cdots + \beta_q x_{t-q} + \varepsilon_t, \quad t = 1, \ldots, n$$

Влияние переменной x продолжается бесконечно, убывая на одну и ту же величину λ $(0 < \lambda < 1)$ с каждым шагом по времени.

Модель полиномиальных лагов:

$$y_t = \delta + \beta x_t + \beta\lambda x_{t-1} + \beta\lambda^2 x_{t-2} + \cdots + \varepsilon_t, \quad t = 1, \ldots, n$$

Модели распределённых лагов

Модель геометрических лагов (модель Койка)

Оценивание параметров модели:

1. Сеточный поиск (наподобие процедуры Хилдрета–Лу)
2. Использование преобразования модели:

$$y_t - \lambda y_{t-1} = \delta(1-\lambda) + \beta x_t + u_t, \quad t = 1, \ldots, n$$

- Метод инструментальных переменных (вместо y_{t-1} используется x_{t-1})
- Метод максимального правдоподобия

Динамические модели

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + \beta_3 y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, n$$

Динамические модели

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + \beta_3 y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t = 1, \ldots, n$$

$$A(\mathsf{L}) y_t = \beta_1 + B(\mathsf{L}) x_t + \varepsilon_t, \quad t = 1, \ldots, n$$
$$A(\mathsf{L}) = 1 - \beta_3 \mathsf{L} \quad B(\mathsf{L}) = \beta_2$$

Динамические модели

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + \beta_3 y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, n$$

$$A(\mathsf{L}) y_t = \beta_1 + B(\mathsf{L}) x_t + \varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, n$$
$$A(\mathsf{L}) = 1 - \beta_3 \mathsf{L} \quad B(\mathsf{L}) = \beta_2$$

При $B(\mathsf{L}) \equiv \beta_1 \equiv 0$ — авторегрессионная модель первого порядка:

AR(1)

$$y_t = \beta y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim iid(0, \sigma^2), \quad i = 1, \dots, n$$

Динамические модели

Авторегрессионная модель первого порядка

$$y_t = \beta y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad i = 1, \ldots, n$$

Динамические модели

Авторегрессионная модель первого порядка

$$y_t = \beta y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad i = 1, \ldots, n$$

Если $|\beta| < 1$, то

$$y_t = \sum_{i=1}^{\infty} \beta^i \varepsilon_{t-i}, \qquad \mathsf{E}\left(y_t\right) = 0, \quad \mathsf{D}\left(y_t\right) = \frac{\sigma^2}{1-\beta^2}$$

Динамические модели

Авторегрессионная модель первого порядка

$$y_t = \beta y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad i = 1, \ldots, n$$

Если $|\beta| < 1$, то

$$y_t = \sum_{i=1}^{\infty} \beta^i \varepsilon_{t-i}, \qquad \mathsf{E}\left(y_t\right) = 0, \quad \mathsf{D}\left(y_t\right) = \frac{\sigma^2}{1-\beta^2}$$

$$\boxed{b = \frac{\sum_t y_t y_{t-1}}{\sum_t y_{t-1}^2}} = \beta + \frac{\sum_t y_{t-1}\varepsilon_t}{\sum_t y_{t-1}^2}$$

Динамические модели

Авторегрессионная модель первого порядка

$$y_t = \beta y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad i = 1, \ldots, n$$

Если $|\beta| < 1$, то

$$y_t = \sum_{i=1}^{\infty} \beta^i \varepsilon_{t-i}, \qquad \mathsf{E}\left(y_t\right) = 0, \quad \mathsf{D}\left(y_t\right) = \frac{\sigma^2}{1-\beta^2}$$

$$\boxed{b = \frac{\sum_t y_t y_{t-1}}{\sum_t y_{t-1}^2}} = \beta + \frac{\sum_t y_{t-1}\varepsilon_t}{\sum_t y_{t-1}^2}$$

Оценка b состоятельна и асимптотически нормальна:

$$\sqrt{n}(b-\beta) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1-\beta^2)$$

Динамические модели

Авторегрессионная модель с автокорреляцией ошибок

$$y_t = \beta y_{t-1} + u_t, \quad i = 1, \ldots, n$$
$$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim iid(0, \sigma^2)$$

Динамические модели

Авторегрессионная модель с автокорреляцией ошибок

$$y_t = \beta y_{t-1} + u_t, \quad i = 1, \ldots, n$$
$$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim iid(0, \sigma^2)$$

y_{t-1} и u_t коррелированы. Если $|\beta| < 1$ и $|\rho| < 1$, то

$$b \xrightarrow{p} \frac{\beta + \rho}{1 + \beta\rho} \neq \beta, \quad r \xrightarrow{p} \frac{\beta\rho(\beta + \rho)}{1 + \beta\rho} \neq \rho$$

Динамические модели

Авторегрессионная модель с автокорреляцией ошибок

$$\begin{aligned} y_t &= \beta y_{t-1} + u_t, \quad i = 1, \ldots, n \\ u_t &= \rho u_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim iid(0, \sigma^2) \end{aligned}$$

y_{t-1} и u_t коррелированы. Если $|\beta| < 1$ и $|\rho| < 1$, то

$$b \xrightarrow{p} \frac{\beta + \rho}{1 + \beta\rho} \neq \beta, \quad r \xrightarrow{p} \frac{\beta\rho(\beta + \rho)}{1 + \beta\rho} \neq \rho$$

$$y_t = (\beta + \rho) y_{t-1} - \beta\rho y_{t-2} + \varepsilon_t, \quad t = 1, \ldots, n$$

— неидентифицируемое уравнение

Динамические модели

Авторегрессионная модель с автокорреляцией ошибок

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + \beta_3 y_{t-1} + u_t, \quad i = 1, \dots, n$$
$$n_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim iid(0, \sigma^2)$$

Методы оценивания:

1. метод инструментальных переменных

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + \beta_3 x_{t-1} + u_t, \quad i = 1, \dots, n$$
$$n_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim iid(0, \sigma^2)$$

2. метод максимального правдоподобия

$$y_t = \beta_1(1-\rho) + \beta_2 x_t - \beta_2 \rho x_{t-1} + (\beta_2 + \rho) y_{t-1} - \beta_3 \rho y_{t-2} + \varepsilon_t$$

3. нелинейный метод наименьших квадратов

Динамические модели

Примеры моделей с лагированными переменными

Частные случаи модели ADL$(1, 1)$:

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + \beta_3 x_{t-1} + \beta_4 y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, n$$

- Модель частичного приспособления
- Модель адаптивных ожиданий
- Модель коррекции ошибок

Модель частичного приспособления
Желаемое (оптимальное, целевое) значение:

$$y_t^* = \alpha + \beta x_t + \varepsilon_t, \quad t = 1, \ldots, n$$

Модель частичного приспособления

Желаемое (оптимальное, целевое) значение:

$$y_t^* = \alpha + \beta x_t + \varepsilon_t, \quad t = 1, \ldots, n$$

$$(y_t - y_{t-1}) = \delta(y_t^* - y_{t-1}), \quad 0 < \delta < 1$$

Модель частичного приспособления

Желаемое (оптимальное, целевое) значение:

$$y_t^* = \alpha + \beta x_t + \varepsilon_t, \quad t = 1, \ldots, n$$

$$y_t = \delta y_t^* + (1 - \delta) y_{t-1}, \quad 0 < \delta < 1$$

Динамические модели
Лагированные переменные
Распределённые лаги
Примеры динамических моделей
Тест Гранжера
Стационарность
Модели временны́х рядов

Динамические модели

Примеры моделей с лагированными переменными

Модель частичного приспособления

$$y_t = \delta\alpha + \delta\beta x_t + (1-\delta)y_{t-1} + \delta\varepsilon_t, \quad t = 1, \ldots, n$$

Модель адаптивных ожиданий

x^*_{t+1} — ожидаемое (в момент времени t) значение переменной x_t

$$y_t = \alpha + \beta x^*_{t+1} + \varepsilon_t, \quad t = 1, \ldots, n$$

Модель адаптивных ожиданий

x^*_{t+1} — ожидаемое (в момент времени t) значение переменной x_t

$$y_t = \alpha + \beta x^*_{t+1} + \varepsilon_t, \quad t = 1, \ldots, n$$

Гипотеза адаптивных ожиданий:

$$(x^*_{t+1} - x^*_t) = (1 - \lambda)(x_t - x^*_t), \quad 0 \leqslant \lambda < 1$$

Модель адаптивных ожиданий

x^*_{t+1} — ожидаемое (в момент времени t) значение переменной x_t

$$y_t = \alpha + \beta x^*_{t+1} + \varepsilon_t, \quad t = 1, \ldots, n$$

Гипотеза адаптивных ожиданий:

$$x^*_{t+1} = \lambda x^*_t + (1 - \lambda) x_t$$

Модель адаптивных ожиданий

$$y_t = \alpha + \beta(1-\lambda)(x_t + \lambda x_{t-1} + \lambda^2 x_{t-2} + \dots) + \varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, n$$

Модель геометрических лагов

Модель коррекции ошибок

(y^*, x^*) — стационарное состояние

$$(1-\beta_4)y^* = \beta_1 + (\beta_2+\beta_3)x^*$$

Модель коррекции ошибок

(y^*, x^*) — стационарное состояние

$$y^* = \frac{\beta_1}{1-\beta_4} + \frac{\beta_2+\beta_3}{1-\beta_4} x^*$$

Модель коррекции ошибок

(y^*, x^*) — стационарное состояние

$$y^* = \frac{\beta_1}{1-\beta_4} + \frac{\beta_2+\beta_3}{1-\beta_4}x^*$$

$$y_t = y_{t-1} + \Delta y_t, \quad x_t = x_{t-1} + \Delta x_t$$

Динамические модели

Примеры моделей с лагированными переменными

Модель коррекции ошибок

$$\Delta y_t = \beta_2 \Delta x_t - (1-\beta_4)\left(y_{t-1} - \frac{\beta_1}{1-\beta_4} - \frac{\beta_2+\beta_3}{1-\beta_4} x_{t-1}\right) + \varepsilon_t$$

Динамические модели

Тест Гранжера на причинно–следственную связь

Если x влияет на y, то изменения x должны предшестовать изменениям y, но не наоборот.

Динамические модели

Тест Гранжера на причинно–следственную связь

Если x влияет на y, то изменения x должны предшестовать изменениям y, но не наоборот.

$$y_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i y_{t-i} + \sum_{j=1}^{m} \beta_j x_{t-j} + \varepsilon_t$$

Динамические модели

Тест Гранжера на причинно–следственную связь

Если x влияет на y, то изменения x должны предшестовать изменениям y, но не наоборот.

$$y_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i y_{t-i} + \sum_{j=1}^{m} \beta_j x_{t-j} + \varepsilon_t$$

$$H_0 \colon \beta_1 = \cdots = \beta_m = 0$$

Динамические модели

Тест Гранжера на причинно–следственную связь

Если x влияет на y, то изменения x должны предшестовать изменениям y, но не наоборот.

$$y_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i y_{t-i} + \sum_{j=1}^{m} \beta_j x_{t-j} + \varepsilon_t$$

$$H_0 \colon \beta_1 = \dots = \beta_m = 0$$

«x влияет на y» означает *возможность* наличия причинно–следственной связи

Стационарность

Стационарность в узком смысле (строгая стационарность)

Совместное распределение m значений $y_t, y_{t+1}, \ldots, y_{t+m}$ не зависит от сдвига по времени

Стационарность

Стационарность в узком смысле (строгая стационарность)

Совместное распределение m значений $y_t, y_{t+1}, \ldots, y_{t+m}$ не зависит от сдвига по времени

Стационарность в широком смысле (слабая стационарность)

Среднее, дисперсия и ковариации y_t не зависят от момента времени t:

$$\mathrm{E}\left(y_t\right) = \mu < \infty, \quad \mathrm{D}\left(y_t\right) = \gamma_0, \quad \mathrm{Cov}\left(y_t, y_{t-k}\right) = \gamma_k$$

Стационарность

Стационарность в узком смысле (строгая стационарность)

Совместное распределение m значений $y_t, y_{t+1}, \ldots, y_{t+m}$ не зависит от сдвига по времени

Стационарность в широком смысле (слабая стационарность)

Среднее, дисперсия и ковариации y_t не зависят от момента времени t:

$$\mathrm{E}\left(y_t\right) = \mu < \infty, \quad \mathrm{D}\left(y_t\right) = \gamma_0, \quad \mathrm{Cov}\left(y_t, y_{t-k}\right) = \gamma_k$$

Автокорреляционная функция:

$$\rho_k = \frac{\mathrm{Cov}\left(y_t, y_{t-k}\right)}{\mathrm{D}\left(y_t\right)} = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$$

Примеры временны́х рядов

- Белый шум

$$y_t = \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim iid(0, \sigma^2), t = 1, \ldots, n$$

- AR(1)

$$y_t = m + \phi y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim iid(0, \sigma^2), t = 1, \ldots, n$$

$$\mathsf{E}\left(y_t\right) = \frac{m}{1-\phi} = \mu, \quad \mathsf{D}\left(y_t\right) = \frac{\sigma^2}{1-\phi^2}, \quad \operatorname{Cov}\left(y_t, y_{t-k}\right) = \frac{\phi^k \sigma^2}{1-\phi^2}$$

- Случайное блуждание

$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim iid(0, \sigma^2), t = 1, \ldots, n$$

$$\mathsf{E}\left(y_t\right) = \mathsf{E}\left(y_{t-1}\right) + 0, \quad \mathsf{D}\left(y_t\right) = \mathsf{D}\left(y_{t-1}\right) + \sigma^2$$