

# Эконометрика

Шишкин Владимир Андреевич

Пермский государственный национальный исследовательский университет

Стохастические  
регрессоры

Инструментальные  
переменные

Системы  
регрессионных  
уравнений

Внешне не  
связанные  
уравнения

Системы  
одновременных  
уравнений

# Стохастические регрессоры

$$y = X\beta + \varepsilon$$

$y$  —  $n \times 1$ -вектор,  $X$  —  $n \times m$ -матрица,  $\varepsilon$  —  $n \times 1$ -вектор

$X$  — случайные величины и (при фиксированной матрице  $X$ )

- 1  $E(\varepsilon | X) = 0$  (или  $E(y | X) = X\beta$ )
- 2  $D(\varepsilon | X) = \sigma^2 I$  (или  $D(y | X) = \sigma^2 I$ )
- 3 при любой реализации  $\text{rank } X = m$

Стохастические  
регрессоры

Инструментальные  
переменные

Системы  
регрессионных  
уравнений

Внешне не  
связанные  
уравнения

Системы  
одновременных  
уравнений

# Стохастические регрессоры

$$y = X\beta + \varepsilon$$

$$b = (X^T X)^{-1} X^T y$$

$$e = y - Xb, \quad s_e^2 = \frac{1}{n - m} \sum_{i=1}^n e_i^2, \quad s_b^2 = s_e^2 (X^T X)^{-1}$$

Стохастические  
регрессоры

Инструментальные  
переменные

Системы  
регрессионных  
уравнений

Внешне не  
связанные  
уравнения

Системы  
одновременных  
уравнений

# Стохастические регрессоры

$$y = X\beta + \varepsilon$$

$$\begin{aligned} E(b | X) &= E(\beta + (X^T X)^{-1} X^T \varepsilon | X) = \\ &= \beta + E((X^T X)^{-1} X^T \varepsilon | X) = \\ &= \beta + (X^T X)^{-1} X^T E(\varepsilon | X) = \beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(b | X) &= D((X^T X)^{-1} X^T y | X) = \\ &= (X^T X)^{-1} X^T D(y | X) X^T (X^T X)^{-1} = \\ &= \sigma^2 (X^T X)^{-1} \end{aligned}$$

Стохастические  
регрессоры

Инструментальные  
переменные

Системы  
регрессионных  
уравнений

Внешне не  
связанные  
уравнения

Системы  
одновременных  
уравнений

# Стохастические регрессоры

$$y = X\beta + \varepsilon$$

$$e = y - Xb = y - X(X^T X)^{-1} X^T y = My$$

$$M = I - X(X^T X)^{-1} X^T$$

$$E(e | X) = E(My | X) = ME(y | X) = MX\beta = 0$$

$$D(e | X) = D(My | X) = MD(y | X)M^T = \sigma^2 M$$

Стохастические  
регрессоры

Инструментальные  
переменные

Системы  
регрессионных  
уравнений

Внешне не  
связанные  
уравнения

Системы  
одновременных  
уравнений

# Стохастические регрессоры

$$y = X\beta + \varepsilon$$

$$E(e^T e | X) = \sigma^2 \text{tr}(M)$$

$$E(s_e^2 | X) = \sigma^2$$

$$\begin{aligned} E(s_b^2 | X) &= E(s_e^2 (X^T X)^{-1} | X) = \\ &= E(s_e^2 | X) (X^T X)^{-1} = \sigma^2 (X^T X)^{-1} \end{aligned}$$

Стохастические  
регрессоры

Инструментальные  
переменные

Системы  
регрессионных  
уравнений

Внешне не  
связанные  
уравнения

Системы  
одновременных  
уравнений

# Стохастические регрессоры

$$y = X\beta + \varepsilon$$

Оценки  $b$ ,  $s_e^2$  и  $s_b^2$  являются условно (относительно  $X$ ) несмещёнными.

Стохастические  
регрессоры

Инструментальные  
переменные

Системы  
регрессионных  
уравнений

Внешне не  
связанные  
уравнения

Системы  
одновременных  
уравнений

# Стохастические регрессоры

$$y = X\beta + \varepsilon$$

Оценки  $b$ ,  $s_e^2$  и  $D(b)$  являются условно (относительно  $X$ ) несмещёнными.

$$E(b) = E(E(b | X)) = E(\beta) = \beta$$

$$E(s_e^2) = E(E(s_e^2 | X)) = \sigma^2$$

$$E(s_b^2) = E(E(s_b^2 | X)) = \sigma^2 E((X^T X)^{-1}) = D(b)$$

Оценки  $b$ ,  $s_e^2$  и  $D(b)$  являются безусловно несмещёнными.

Стохастические  
регрессоры

Инструментальные  
переменные

Системы  
регрессионных  
уравнений

Внешне не  
связанные  
уравнения

Системы  
одновременных  
уравнений



# Стохастические регрессоры

$$y = X\beta + \varepsilon$$

При выполнении условий

- 1  $E(\varepsilon | X) = 0$
- 2  $D(\varepsilon | X) = \sigma^2 I$
- 3 при любой реализации  $\text{rank } X = m$

МНК–оценка в модели со стохастическими регрессорами обладает свойствами, аналогичными свойствам МНК–оценки в классической модели.

Стохастические регрессоры

Инструментальные переменные

Системы регрессионных уравнений

Внешне не связанные уравнения

Системы одновременных уравнений

# Стохастические регрессоры

$$y = X\beta + \varepsilon$$

$$\begin{aligned} b &= (X^T X)^{-1} X^T y = \beta + (X^T X)^{-1} X^T \varepsilon = \\ &= \beta + \left( \frac{1}{n} X^T X \right)^{-1} \left( \frac{1}{n} X^T \varepsilon \right) \end{aligned}$$

Если

- 1 существует  $\text{plim}_{n \rightarrow \infty} (1/n) X^T X = A$ , причём  $A > 0$ ;
- 2  $\text{plim}_{n \rightarrow \infty} (1/n) X^T \varepsilon = 0$ ,

то  $\text{plim}_{n \rightarrow \infty} b = \beta$  (оценка  $b$  состоятельна)

Стохастические  
регрессоры

Инструментальные  
переменные

Системы  
регрессионных  
уравнений

Внешне не  
связанные  
уравнения

Системы  
одновременных  
уравнений

# Инструментальные переменные

Исходная модель

$$y = X\beta + \varepsilon$$

Стохастические  
регрессоры

Инструментальны  
переменные

Системы  
регрессионных  
уравнений

Внешне не  
связанные  
уравнения

Системы  
одновременных  
уравнений

# Инструментальные переменные

Исходная модель

$$y = X\beta + \varepsilon$$

$Z$  —  $n \times m$ -матрица инструментальных переменных

- 1 новые независимые переменные должны быть «хорошо коррелированы» с исходными независимыми переменными
- 2 новые переменные не должны быть коррелированы с ошибками

матрица  $Z^T X$  должна быть обратима

Стохастические  
регрессоры

Инструментальны  
переменные

Системы  
регрессионных  
уравнений

Внешне не  
связанные  
уравнения

Системы  
одновременных  
уравнений

# Инструментальные переменные

Исходная модель

$$y = X\beta + \varepsilon$$

Оценка параметров  $\beta$  с помощью инструментальных переменных:

$$b_{iv} = (Z^T X)^{-1} Z^T y$$

Стохастические  
регрессоры

Инструментальны  
переменные

Системы  
регрессионных  
уравнений

Внешне не  
связанные  
уравнения

Системы  
одновременных  
уравнений

# Инструментальные переменные

Исходная модель

$$y = X\beta + \varepsilon$$

Оценка параметров  $\beta$  с помощью инструментальных переменных:

$$b_{iv} = (Z^T X)^{-1} Z^T y$$

$$b_{iv} = (Z^T X)^{-1} Z^T (X\beta + \varepsilon) = \beta + (Z^T X)^{-1} Z^T \varepsilon$$

Стохастические  
регрессоры

Инструментальны  
переменные

Системы  
регрессионных  
уравнений

Внешне не  
связанные  
уравнения

Системы  
одновременных  
уравнений

# Инструментальные переменные

## Ошибки в измерениях зависимой переменной

Истинная модель:

$$y = X\beta + \varepsilon$$

$y$  измеряется с ошибкой и наблюдается

$$y^* = y + u$$

$u$  — ошибки, имеющие нулевое математическое ожидание и не зависящие от  $\varepsilon$  и  $X$

$$y^* = X\beta + (\varepsilon + u)$$

$$E(\varepsilon + u) = 0, \quad \text{Cov}(X, \varepsilon + u) = 0, \quad D(\varepsilon + u) = \sigma_\varepsilon^2 + \sigma_u^2$$

Стохастические  
регрессоры

Инструментальны  
переменные

Системы  
регрессионных  
уравнений

Внешне не  
связанные  
уравнения

Системы  
одновременных  
уравнений

# Инструментальные переменные

## Ошибки в измерении независимой переменной

Истинная модель:

$$y = X\beta + \varepsilon$$

$X$  измеряется с ошибкой и наблюдается

$$X^* = X + V$$

$V$  — матрица ошибок, имеющая нулевое математическое ожидание и не зависящая от  $\varepsilon$

$$y^* = X^*\beta + (\varepsilon - V\beta) = X^*\beta + \varepsilon^*$$

$$E((X^*)^T \varepsilon^*) = E((X^T + V^T)(\varepsilon - V\beta)) = -E(V^T V)\beta$$

Стохастические  
регрессоры

Инструментальные  
переменные

Системы  
регрессионных  
уравнений

Внешне не  
связанные  
уравнения

Системы  
одновременных  
уравнений



## Двухшаговый метод наименьших квадратов

1

$$\tilde{x}_j = Z(Z^T Z)^{-1} Z^T x_j, \quad k = 1, \dots, m$$

$$\tilde{X} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_m) = Z(Z^T Z)^{-1} Z^T X$$

2

$$b_{iv} = (\tilde{X}^T \tilde{X})^{-1} \tilde{X}^T y$$

# Инструментальные переменные

- 1 При наличии корреляции между  $X$  и  $\varepsilon$  МНК-оценки смещены и несостоятельны; для получения состоятельных оценок можно воспользоваться инструментальными переменными.
- 2 Число инструментальных переменных должно быть не меньше числа исходных независимых переменных.
- 3 Инструментальные переменные должны быть некоррелированы с ошибками и коррелированы с исходными независимыми переменными.
- 4
  - При наличии ошибок в измерениях зависимой переменной МНК-оценка остаётся несмещённой и состоятельной.
  - Если с ошибками измеряются независимые переменные, то возникают корреляции между регрессорами и ошибками (следовательно, МНК-оценки становятся несостоятельными).

Стохастические  
регрессоры

Инструментальные  
переменные

Системы  
регрессионных  
уравнений

Внешне не  
связанные  
уравнения

Системы  
одновременных  
уравнений

# Внешне не связанные уравнения

$$y_1 = X_1\beta_1 + \varepsilon_1,$$

$$y_2 = X_2\beta_2 + \varepsilon_2,$$

...

$$y_M = X_M\beta_M + \varepsilon_M$$

$$E(\varepsilon_i\varepsilon_j^\top) = \sigma_{ij}I_n, \quad i, j = 1, \dots, M$$

Стохастические  
регрессоры

Инструментальные  
переменные

Системы  
регрессионных  
уравнений

**Внешне не  
связанные  
уравнения**

Системы  
одновременных  
уравнений

## Внешне не связанные уравнения

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_M \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} X_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & X_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & X_M \end{pmatrix}$$

$$\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_M \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_M \end{pmatrix}, \quad \Sigma = (\sigma_{ij}), \quad i, j = 1, \dots, M$$

$$y = X\beta + \varepsilon$$

$$E(\varepsilon\varepsilon^\top) = \Omega = \Sigma \otimes I_n$$

$$b = (X^\top \Omega^{-1} X)^{-1} X^\top \Omega^{-1} y$$

Стохастические  
регрессоры

Инструментальные  
переменные

Системы  
регрессионных  
уравнений

**Внешне не  
связанные  
уравнения**

Системы  
одновременных  
уравнений

# Системы одновременных уравнений

- Структурная форма

$$\beta_{11}y_{1t} + \beta_{12}y_{2t} + \dots + \beta_{1m}y_{mt} + \gamma_{11}x_{1t} + \dots + \gamma_{1k}x_{kt} = \varepsilon_{1t}$$

$$\beta_{21}y_{1t} + \beta_{22}y_{2t} + \dots + \beta_{2m}y_{mt} + \gamma_{21}x_{1t} + \dots + \gamma_{2k}x_{kt} = \varepsilon_{2t}$$

...

$$\beta_{m1}y_{1t} + \beta_{m2}y_{2t} + \dots + \beta_{mm}y_{mt} + \gamma_{m1}x_{1t} + \dots + \gamma_{mk}x_{kt} = \varepsilon_{mt}$$

- Приведённая форма

$$y_{1t} = \alpha_{11}x_{1t} + \dots + \alpha_{1k}x_{kt} + \nu_{1t}$$

$$y_{2t} = \alpha_{21}x_{1t} + \dots + \alpha_{2k}x_{kt} + \nu_{2t}$$

...

$$y_{mt} = \alpha_{m1}x_{1t} + \dots + \alpha_{mk}x_{kt} + \nu_{mt}$$

Стохастические  
регрессоры

Инструментальные  
переменные

Системы  
регрессионных  
уравнений

Внешне не  
связанные  
уравнения

Системы  
одновременных  
уравнений

# Системы одновременных уравнений

- Структурная форма

$$By_t + \Gamma x_t = \varepsilon_t$$

- Приведённая форма

$$y_t = -B^{-1}\Gamma x_t + B^{-1}\varepsilon_t$$

Стохастические  
регрессоры

Инструментальные  
переменные

Системы  
регрессионных  
уравнений

Внешне не  
связанные  
уравнения

Системы  
одновременных  
уравнений

# Системы одновременных уравнений

## Пример

1

$$\begin{aligned}M_t &= a_0 + a_1 Y_t + u_{1t}, \\ Y_t &= b_0 + b_1 M_t + b_2 I + u_{2t}\end{aligned}$$

$M$  — денежные запасы;

$Y$  — ВВП;

$I$  — инвестиции.

2

$$\begin{aligned}M_t &= a_0 + a_1 Y_t + u_{1t}, \\ Y_t &= b_0 + b_1 M_t + b_2 I + b_3 G_t + u_{2t}\end{aligned}$$

$G$  — правительственные расходы.

Стохастические  
регрессоры

Инструментальны  
переменные

Системы  
регрессионных  
уравнений

Внешне не  
связанные  
уравнения

Системы  
одновременных  
уравнений

# Системы одновременных уравнений

## Косвенный метод наименьших квадратов

- 1 Записать модель в *структурной форме*.
- 2 Определить какие переменные в модели являются экзогенными, а какие — эндогенными.
- 3 Выразить эндогенные переменные через экзогенные (записать модель в *приведённой форме*).
- 4 Оценить коэффициенты модели в приведённой форме с помощью метода наименьших квадратов.
- 5 Вычислить (если возможно) структурные коэффициенты, выразив их через коэффициенты приведённой формы.

Стохастические  
регрессоры

Инструментальные  
переменные

Системы  
регрессионных  
уравнений

Внешне не  
связанные  
уравнения

Системы  
одновременных  
уравнений



# Системы одновременных уравнений

## Двухшаговый метод наименьших квадратов

- 1 Вычислить (смещённые) оценки коэффициентов модели в структурной форме.
- 2 Вычислить модельные значения (эндогенных) переменных.
- 3 Используя модельные значения в качестве инструментальных переменных, вычислить оценки структурных коэффициентов.

Стохастические  
регрессоры

Инструментальные  
переменные

Системы  
регрессионных  
уравнений

Внешне не  
связанные  
уравнения

Системы  
одновременных  
уравнений