

Тестовое задание для проверки знаний и навыков использования программного обеспечения в эконометрических расчётах

## Содержание

<b>1</b>	<b>Задание</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Указания</b>	<b>3</b>
2.1	Эконометрика . . . . .	3
2.2	Microsoft Excel . . . . .	4
2.3	R . . . . .	4

# 1 Задание

1. Сгенерируйте значения  $y$ :

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 x_i^2 + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

$$n = 100; x_i = i/10; \varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2), \sigma = 4.$$

2. Оцените коэффициенты  $\beta_0$ ,  $\beta_1$  и  $\beta_2$

- (a) Постройте систему нормальных уравнений ( $x_1 = x$ ,  $x_2 = x^2$ )

$$\begin{aligned} b_0 + b_1 \bar{x}_1 + b_2 \bar{x}_2 &= \bar{y} \\ b_0 \bar{x}_1 + b_1 \overline{x_1^2} + b_2 \overline{x_1 x_2} &= \overline{x_1 y} \\ b_0 \bar{x}_2 + b_1 \overline{x_1 x_2} + b_2 \overline{x_2^2} &= \overline{x_2 y} \end{aligned}$$

и найдите её решение.

- (b) Полученное решение сравните с решением, найденным по формуле

$$b = (X^T X)^{-1} X^T y,$$

где  $X = (1, x_1, x_2)$ .

- (c) Найдите оценки, напрямую используя метод наименьших квадратов:

$$\sum_{i=1}^n (y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 x_i^2))^2 \rightarrow \min.$$

3. Проверьте значимость

- (a) модели с помощью  $F$ -критерия Фишера;  
(b) коэффициентов с помощью  $t$ -критерия Стьюдента.

4. Оцените качество модели, вычислив

- (a) среднюю абсолютную ошибку;  
(b) среднюю относительную ошибку;  
(c) коэффициент детерминации;  
(d) коэффициент множественной корреляции.

5. Постройте прогноз для  $10 \leq x \leq 15$  (точечные значения и доверительные интервалы).

6. Нарисуйте графики  $y$  и  $\tilde{y}$ , прогнозных значений и доверительных интервалов для них.

## 2 Указания

### 2.1 Эконометрика

$$e = y - \tilde{y}$$

Для  $F$ -критерия Фишера:

$$F_{\text{набл}} = \frac{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^n (\tilde{y}_i - \bar{y})^2}{\frac{1}{n-m-1} \sum_{i=1}^n e_i^2} \sim F_{m, n-m-1}$$

$m$  — количество независимых переменных в модели;  $\tilde{y} = Xb$  — модельные значения;  $\bar{y}$  — среднее арифметическое значение.

Для  $t$ -критерия Стьюдента:

$$t_{\text{набл}, i} = \frac{b_i}{s_{b_i}} \sim t_{n-m-1}$$

$s_{b_i} = s_e \sqrt{c_{i+1}}$ ;  $c_i$  —  $i$ -й диагональный элемент в матрице  $(X^T X)^{-1}$ ,

$$s_e^2 = \frac{1}{n-m-1} \sum_{i=1}^n e_i^2$$

Средняя абсолютная ошибка:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |e_i|$$

Средняя относительная ошибка (коэффициент аппроксимации):

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{e_i}{\tilde{y}_i} \right|$$

Коэффициент детерминации:

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\tilde{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} \quad \text{или} \quad R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n e_i^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$$

$\sqrt{R^2}$  — коэффициент множественной корреляции (численная характеристика силы связи отклика со всеми предикторами).

Прогнозное (точечное) значение в  $x^*$ :

$$y^* = (1, x_1^*, x_2^*) \cdot b \quad \text{или} \quad y^* = b_0 + b_1 x_1^* + b_2 x_2^*$$

Доверительный интервал

$$[y^* + t_{n-m-1}(\alpha/2) \cdot s_{y^*}, y^* + t_{n-m-1}(1-\alpha/2) \cdot s_{y^*}]$$
$$s_{y^*} = s_e \sqrt{1 + x^*(X^T X)^{-1}(x^*)^T}$$

$t_{n-m-1}(\alpha)$  —  $\alpha$ -квантиль для  $t$ -распределения Стьюдента с  $n-m-1$  степенями свободы.

## 2.2 Microsoft Excel

Для генерирования случайных величин используйте инструмент «Анализ данных → Генерация случайных чисел» (раздел «Данные»).

Для вычисления квантилей используются функции

- $t_n(1 - \alpha/2)$ : СТЬЮДЕНТ.ОБР.2Х( $\alpha; n$ ) или СТЬЮДЕНТ.ОБР( $1 - \alpha/2; n$ )
- $F_{n_1, n_2}(1 - \alpha)$ : F.ОБР( $1 - \alpha; n_1; n_2$ ) или F.ОБР.ПХ( $\alpha; n_1; n_2$ )

Матричные операции: ТРАНСП — транспонирование, МУМНОЖ — перемножение матриц, МОБР — вычисление обратной матрицы.

## 2.3 R

Для генерирования выборки  $\varepsilon \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  объёмом  $n$  используйте команду `rnorm(n, mean= $\mu$ , sd= $\sigma$ )`.

Для вычисления квантилей используются функции

- $t_n(\alpha)$ : `qt( $\alpha, n$ )`
- $F_{n_1, n_2}(\alpha)$ : `qf( $\alpha, n_1, n_2$ )`

Матричные операции: `t(A)` — транспонирование, `A%%B` — перемножение матриц, `solve(A)` — вычисление обратной матрицы.

## Список литературы

- [1] Шишкин В. А. *Программное обеспечение экономических расчётов*  
[www.vsh1791.ru](http://www.vsh1791.ru)